

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO IV - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Costante del moto.** Affinché $H(x, y)$ sia costante del moto, deve valere $\dot{H} = 0$. Calcoliamo quindi la derivata totale di $H(x, y)$:

$$\frac{d}{dt}H(x, y) = \langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle$$

ma si vede facilmente che valgono

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \end{cases}$$

pertanto avremo

$$\langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = \langle (-\dot{y}, \dot{x}), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} = 0$$

e quindi $H(x, y)$ è una costante del moto per il sistema.

(1.2) **Punti d'equilibrio.** Poiché si ha equilibrio per $\dot{x} = \dot{y} = 0$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2(x^2 - 1)(y - e^{-x^2}) = 0 \\ 2xy(4e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - y) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo

$$x = 0 \quad y = 0 \quad y = 4e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$$

Sostituendo nella prima $x = 0$ otteniamo $y = 1$. Sostituendo $y = 0$ otteniamo $x = \pm 1$ e infine, per $y = 4e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$ avremo $(x^2 - 1)(3 - 2x^2)e^{-x^2} = 0$ e quindi di nuovo $x = \pm 1$ da cui $y = 4e^{-1} - 2e^{-1} = 2e^{-1}$ e $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ da cui $y = e^{-\frac{3}{2}}$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema saranno

$$\begin{aligned} P_1 = (0, 1) \quad P_2 = (1, 0) \quad P_3 = (-1, 0) \quad P_4 = (1, 2e^{-1}) \\ P_5 = (-1, 2e^{-1}) \quad P_6 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right) \quad P_7 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Per determinare la stabilità dei punti d'equilibrio, cominciamo con lo studio del sistema linearizzato. Ricordiamo che la matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

e quindi nel nostro caso avremo

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 4x(y - (2 - x^2)e^{-x^2}) & 2(x^2 - 1) \\ 4y(2 - 7x^2 + 2x^4)e^{-x^2} - 2y^2 & 4x((2 - x^2)e^{-x^2} - y) \end{pmatrix}$$

Vediamo dunque cosa succede vicino ai punti d'equilibrio.

$$A(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 12$. In questo caso gli autovalori sono entrambi tali che $Re(\lambda) = 0$ e quindi il sistema linearizzato non ci dice nulla sulla stabilità di P_1 .

$$A(1, 0) = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori reali di segno opposto. Pertanto P_2 è un punto d'equilibrio instabile del sistema.

$$A(-1, 0) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}$$

pertanto, con le stesse argomentazioni usate per P_2 , avremo che P_3 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A = (1, 2e^{-1}) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ -32e^{-2} & -4e^{-1} \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 16e^{-2}$, quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm 4e^{-1}$ e dunque P_4 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A(-1, 2e^{-1}) = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ -32e^{-2} & 4e^{-1} \end{pmatrix}$$

e quindi, con le stesse argomentazioni di prima possiamo concludere che P_5 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ -18e^{-3} & -\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 12e^{-3}$ e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla, perciò il sistema linearizzato non dà informazioni sulla stabilità di P_6 . Infine

$$A\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ -18e^{-3} & \sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

Di nuovo il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 12e^{-3}$ e dunque non abbiamo informazioni sulla stabilità di P_7 . Rimane dunque da determinare se P_1 , P_6 e P_7 sono stabile o meno. Consideriamo la matrice hessiana di $H(x, y)$, i.e.

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y(7x^2 - 2x^4 - 2)e^{-x^2} + 2y^2 & 4x(y - (2 - x^2)e^{-x^2}) \\ 4x(y - (2 - x^2)e^{-x^2}) & 2(x^2 - 1) \end{pmatrix}$$

che, calcolata in P_1 è

$$\mathcal{H}(0, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi, poiché $\det(\mathcal{H}) = 12 > 0$ e $\mathcal{H}_{11} = -6 < 0$ avremo che $(0, 1)$ è un punto di massimo per la funzione $H(x, y)$. Pertanto, se consideriamo la funzione

$$W(x, y) = H(0, 1) - H(x, y)$$

avremo che $W(x, y)$ soddisfa le condizioni del teorema di Ljapunov rispetto a P_1 e quindi P_1 è un punto d'equilibrio stabile per il sistema.

Analogamente, calcolando l'hessiana in P_6 abbiamo

$$\mathcal{H}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 18e^{-3} & \sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} \\ \sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

e, poiché $\det \mathcal{H} = 12e^{-3} > 0$ e $\mathcal{H}_{11} = 18e^{-3} > 0$ avremo che $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ è un punto di minimo per la funzione $H(x, y)$. Quindi la funzione

$$W(x, y) = H(x, y) - H\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_6 che quindi risulta essere un punto d'equilibrio stabile. Infine, con calcoli del tutto analoghi, si vede che anche P_7 è un punto d'equilibrio stabile. Infatti

$$\mathcal{H}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 18e^{-3} & -\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} \\ -\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi la funzione

$$W(x, y) = H(x, y) - H\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_7 che quindi risulta essere un punto d'equilibrio stabile.

(1.3) **Curve di livello.** Cominciamo con il calcolare il valore di H nei punti instabili. Osserviamo che $H(P_i) = 0 \quad \forall i = 2, 3, 4, 5$ ossia $H = 0$ nei punti instabili. Studiamo quindi la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x^2 - 1)(y - 2e^{-x^2}) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$$

dove le curve \mathcal{C}_i sono

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2e^{-x^2}\}$$

perciò avremo 16 possibili traiettorie di cui 4 punti instabili e 12 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

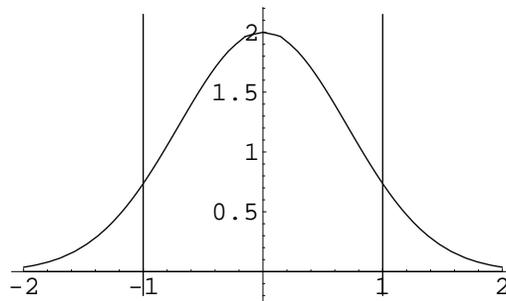


Figura 1: Grafico della curva di livello Γ_0

Versi di percorrenza. Analizziamo quindi i versi di percorrenza. Su \mathcal{C}_1 , poiché $y \equiv 0$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(1 - x^2)e^{-x^2} \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

da cui si vede immediatamente che $\dot{x} > 0$ per $-1 < x < 1$ e minore di zero altrimenti. Su $\mathcal{C}_{2,3}$, invece, si ha $x \equiv 1$ e $x \equiv -1$ rispettivamente, perciò su \mathcal{C}_2 avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 4e^{-1}y - 2y^2 \end{cases}$$

e quindi $\dot{y} > 0$ per $0 < y < 2e^{-1}$ e minore di zero altrimenti; viceversa su \mathcal{C}_3 avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 2y^2 - 4e^{-1}y \end{cases}$$

perciò $\dot{y} > 0$ per $y < 0$ e $y > 2e^{-1}$.

Infine lungo \mathcal{C}_4 abbiamo $y = 2e^{-x^2}$; analizziamo solo in verso nella direzione x .

$$\dot{x} = 2(x^2 - 1)e^{-x^2}$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per $x < -1$ e $x > 1$ e minore di zero altrimenti.

Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello per dipendenza continua dai dati iniziali.

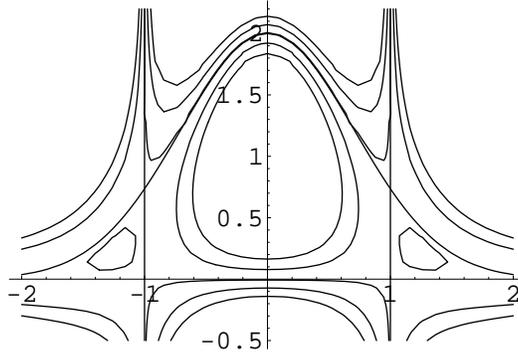


Figura 2: Piano delle fasi per il sistema

(1.4) **Traiettorie periodiche.** Sappiamo che se esiste una regione U che sia racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di H e contenga un unico punto d'equilibrio x_0 che sia stabile, allora ogni traiettoria $\varphi(t, \bar{x})$, con $\bar{x} \in U \setminus \{x_0\}$ è periodica, e si svolge su un'orbita che contiene x_0 al suo interno. Quindi, i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono nell'aperto

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, 0 < y < e^{-x^2} \right\} \setminus \{P_1\}$$

Non abbiamo alcun risultato teorico che ci assicuri l'esistenza di traiettorie periodiche nelle regioni

$$U_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 < y < e^{-x^2} \right\} \setminus \{P_6\}$$

$$U_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1, 0 < y < e^{-x^2} \right\} \setminus \{P_7\}$$

non essendo delimitate da curve di livello chiuse. Tuttavia anche in U_1 e U_2 ogni dato iniziale genera un'orbita periodica. Dimostriamo che ciò è vero per U_1 . La dimostrazione per U_2 è del tutto analoga.

Certamente avremo orbite periodiche ε -vicine al punto d'equilibrio stabile P_6 trattandosi di un punto di minimo isolato per la costante del moto H . Supponiamo per assurdo che esista una traiettoria $\varphi(t, x)$ con dato iniziale in U_1 non periodica. Tale $\varphi(t, x)$ non può tendere ad un ciclo limite (perché H non è identicamente costante su alcun aperto) né al punto stabile P_6 (perché altrimenti intersecherebbe le traiettorie periodiche intorno a P_6); quindi l'unica possibilità è che abbia l'asse x come asintoto, perciò, lungo questa traiettoria

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = H(\infty, 0)$$

ma, poiché H è costante del moto, $H(\infty, 0) = 0$ dato che l'asse x è una separatrice.

Ne segue che anche $H(x, y) = 0$ lungo la traiettoria $\varphi(t, x)$. Poiché $H(x, y)$ non è costante su alcun aperto, esisterà una traiettoria tra $\varphi(t, x)$ e la separatrice $\{y = 2e^{-x^2}\}$, sia $\tilde{\varphi}(t, x)$, lungo cui $H \neq 0$. Ma $\tilde{\varphi}$, per continuità dai dati iniziali, dovrà avere come asintoto l'asse x quindi, per la stessa ragione di prima, $H(x, y) = 0$ anche lungo $\tilde{\varphi}$ il che è assurdo. Pertanto $\varphi(t, x)$ è periodica.

ESERCIZIO 2.

(2.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x, y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo quindi

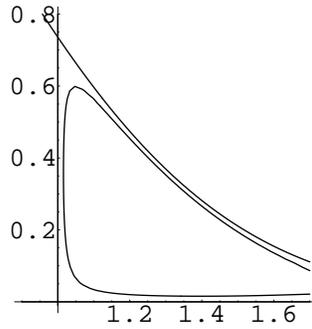


Figura 3: Grafico della situazione in U_6 . La curva interna in realtà si chiude

$$H(x, y) = \int dy (2xy - x^4 + x^2) = xy^2 - x^4y + x^2y + f(x)$$

con $f(x)$ da determinare. Derivando rispetto a x otteniamo

$$-y = \frac{\partial H}{\partial x} = y^2 - 4x^3y + 2xy + f'(x)$$

e quindi avremo $f'(x) = 0$ cioè $f(x)$ è una costante arbitraria che, per comodità imponiamo nulla. Perciò una costante del moto è

$$H(x, y) = xy^2 - x^4y + x^2y$$

(2.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x(2y - x^3 + x) = 0 \\ y(4x^3 - y - 2x) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo $y = 0$ e $y = 4x^3 - 2x$. Sostituendo $y = 0$ nella prima, troviamo $x^2(1 - x^2) = 0$ e quindi $x = 0$, $x = \pm 1$. Sostituendo invece $y = 4x^3 - 2x$, avremo $x^2(7x^2 - 3)$ cioè $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ e quindi, rispettivamente, $y = 0$, $y = -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $y = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema saranno

$$P_0 = (0, 0) \quad P_1 = (1, 0) \quad P_2 = (-1, 0) \quad P_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{7}}, -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \right) \quad P_4 = \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}, \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \right)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - 4x^3 + 2x & 2x \\ 12x^2y - 2y & 4x^3 - 2y - 2x \end{pmatrix}$$

Vediamo quindi cosa accade vicino ai punti d'equilibrio. $A(0, 0) = (0)_{i,j}$ che è già in forma diagonale con autovalori nulli, e quindi non si può dire nulla a proposito della stabilità di P_0 studiando il sistema linearizzato.

$$A(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$ e quindi gli autovalori sono $\lambda = \pm 4$. Perciò concludiamo che P_1 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A(-1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi anche P_2 , con le stesse argomentazioni di prima, risulta essere instabile.

$$A \left(\sqrt{\frac{3}{7}}, -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & 2\sqrt{\frac{3}{7}} \\ -\frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{36}{49}$ e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla. Perciò non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_3 . Analogamente

$$A \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}, \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & -2\sqrt{\frac{3}{7}} \\ \frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è di nuovo $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{36}{49}$, perciò non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_4 . Dobbiamo studiare, quindi, la stabilità di P_0 , P_4 e P_4 . Per quanto riguarda P_0 , osserviamo che la matrice hessiana di H , calcolata in P_0 è la matrice nulla. Quindi non possiamo trovare una funzione di Ljapunov per P_0 a partire da H , perciò lo studio della stabilità di P_0 è rimandato. Riguardo a P_3 , invece, avemo che

$$\mathcal{H} \left(\sqrt{\frac{3}{7}}, -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \\ -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & 2\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

e, poiché $\det(\mathcal{H}) > 0$ e $\mathcal{H}_{1,1} > 0$, allora P_3 è un punto di minimo isolato per H . Definita quindi la funzione

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_3)$$

si osserva immediatamente che $W(x, y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_3 che quindi è un punto d'equilibrio stabile. Analogamente avremo che

$$\mathcal{H} \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}, \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \\ \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & -2\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

e, poiché $\det(\mathcal{H}) > 0$ e $\mathcal{H}_{1,1} < 0$, allora P_4 è un punto di massimo isolato per H . Definita quindi la funzione

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_4)$$

si osserva immediatamente che $W(x, y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_4 che quindi è un punto d'equilibrio stabile. Studieremo la stabilità di P_0 solo dopo aver tracciato un grafico qualitativo nel piano delle fasi e determinato i versi di percorrenza lungo le traiettorie.

(2.3) Curve di livello. Cominciamo con il calcolare il valore di H nei punti instabili. Osserviamo che $H(P_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2$ ossia $H = 0$ nei punti instabili. Studiamo quindi la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy(y - x^3 + x) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

dove le curve \mathcal{C}_i sono

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3 - x\}$$

perciò avremo 13 possibili traiettorie di cui 3 punti instabili e 10 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

Versi di percorrenza. Analizziamo quindi i versi di percorrenza. Su \mathcal{C}_1 , poiché $x \equiv 0$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y^2 \end{cases}$$

da cui si vede immediatamente che $\dot{y} < 0 \quad \forall y \neq 0$. Su \mathcal{C}_2 , poichè $y \equiv 0$, avremo invece

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(1 - x^2) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

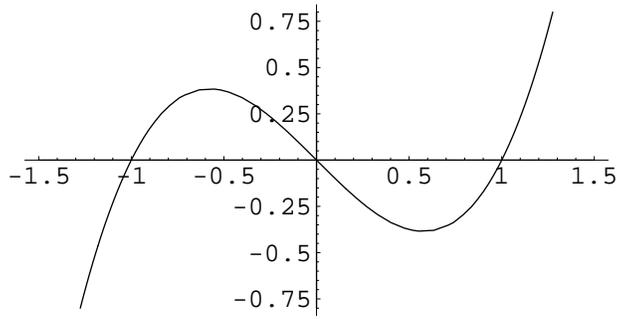


Figura 4: Grafico della curva di livello Γ_0

e quindi $\dot{x} > 0$ per $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$. Infine, su \mathcal{C}_3 , analizzando solo il verso di percorrenza nella direzione x per semplicità.

$$\dot{x} = x^2(x^2 - 1)$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per $x < -1$ e $x > 1$. Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello per dipendenza continua dai dati iniziali.

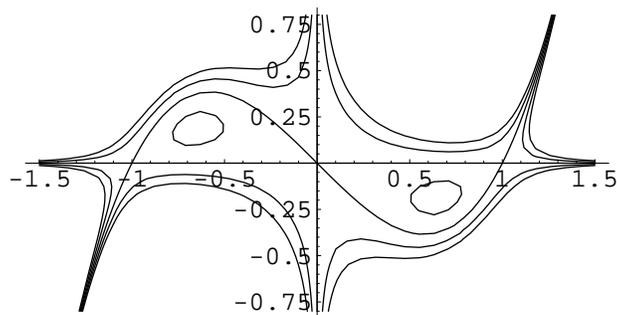


Figura 5: Piano delle fasi per il sistema

(2.4) **Traiettorie periodiche.** Per gli stessi argomenti usati in (1.4) sappiamo che i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono negli aperti

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^3 - x < y < 0\} \setminus \{P_3\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0, 0 < y < x^3 - x\} \setminus \{P_4\}$$

(2.5) **Soluzione esplicita.** Osserviamo immediatamente che il dato iniziale si trova sulla curva di livello \mathcal{C}_2 dove vale $\dot{y} = 0$. Pertanto si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - x^4 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Separando le variabili, otteniamo

$$1 = \frac{\dot{x}}{x^2 - x^4}$$

quindi, integrando ambo i membri

$$\begin{aligned}
t &= \int_2^x \frac{dy}{y^2 - y^4} \\
&= \int_2^x dy \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{2(1-y)} + \frac{1}{2(1+y)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1+x|}{3|x-1|} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Perciò la soluzione esplicita è $x(t)$ tale che

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1+x|}{3|x-1|} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = t$$

ESERCIZIO 3.

(3.1) **Costante del moto.** Calcoliamo la derivata totale di $H(x, y)$:

$$\frac{d}{dt} H(x, y) = \langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle$$

D'altra parte si vede immediatamente che

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 2x(8x^2 - 8 + 5y^2) = -\dot{y} \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 2y(5x^2 - 5 + 2y^2) = \dot{x} \end{cases}$$

perciò chiaramente $\langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = 0$ e quindi $H(x, y)$ è una costante del moto per il sistema.

(3.2) **Punti d'equilibrio.** Cerchiamo i punti in cui si annulla il campo vettoriale.

$$\begin{cases} 2y(5x^2 + 2y^2 - 5) = 0 \\ 2x(8 - 8x^2 - 5y^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo $y = 0$ e $2y^2 = 5 - 5x^2$. Sostituendo $y = 0$ nella seconda troviamo $x = 0$ e $x = \pm 1$; invece per $y^2 = 5/2(1 - x^2)$ otteniamo $9x(x^2 - 1) = 0$, perciò per $x = \pm 1$ avremo di nuovo $y = 0$ mentre da $x = 0$ troviamo $y = \pm \sqrt{5/2}$. Quindi i punti d'equilibrio del sistema sono

$$P_0 = (0, 0) \quad P_1 = (1, 0) \quad P_2 = (-1, 0) \quad P_3 = \left(0, \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \quad P_4 = \left(0, -\sqrt{\frac{5}{2}} \right)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 20xy & 10x^2 + 12y^2 - 10 \\ 16 - 48x^2 - 10y^2 & -20xy \end{pmatrix}$$

che calcolata in $(0, 0)$ da

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 160$ e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla; perciò non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_0 .

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -32 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2$ e quindi non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_1 e P_2 . Infine

$$A \left(0, \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 180$, perciò gli autovalori hanno entrambi parte reale uguale a zero quindi non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_3 e P_4 . Concludiamo quindi che lo studio del sistema

linearizzato non è stato utile nel determinare la stabilità di nessun punto d'equilibrio. Consideriamo la matrice hessiana di H , i.e.

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 48x^2 + 10y^2 - 16 & 20xy \\ 20xy & 10x^2 + 12y^2 - 10 \end{pmatrix}$$

che calcolata in P_0 è

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

pertanto P_0 è un punto di massimo isolato per la costante del moto e $H(0, 0) = 4$. Definita la funzione

$$W(x, y) = 4 - H(0, 0)$$

si verifica immediatamente che W è una funzione di Ljapunov per P_0 che quindi è stabile.

$$\mathcal{H}(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi P_1 e P_2 sono punti di sella per H , dunque non possiamo trovare una funzione di Ljapunov a partire da $H(x, y)$; lo studio della stabilità di P_1 e P_2 sarà completato in seguito. Infine

$$\mathcal{H}\left(0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

e quindi P_3 e P_4 sono punti di minimo isolato per il sistema e inoltre $H\left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = H\left(0, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}$. Se definiamo

$$W(x, y) = H(x, y) + \frac{9}{4}$$

si verifica che W è funzione di Ljapunov per i punti P_3 e P_4 che perciò sono stabili.

(3.3) **Curva di livello** Γ_0 Studiamo la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1)(4x^2 + y^2 - 4) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

dove le curve \mathcal{C}_i sono

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\} \end{aligned}$$

perciò avremo 8 possibile traiettorie di cui 2 punti d'equilibrio e 6 traiettorie che tendono ai punti d'equilibrio nel futuro e nel passato (eterocline).

Versi di Percorrenza. Su \mathcal{C}_1 abbiamo $y^2 = 1 - x^2$. Analizziamo solo il verso di percorrenza nella direzione x . Innanzitutto notiamo che la curva è divisa dai punti d'equilibrio P_1 e P_2 che si trovano sull'asse x , quindi studiamo separatamente i casi $y > 0$ e $y < 0$. Nel primo caso, infatti, abbiamo

$$\dot{x} = 6\sqrt{1-x^2}(x^2-1)$$

e quindi $\dot{x} < 0$. Nel secondo caso, invece, abbiamo

$$\dot{x} = 6\sqrt{1-x^2}(1-x^2)$$

perciò $\dot{x} > 0$. Su \mathcal{C}_2 , abbiamo $y^2 = 4(1-x^2)$ e di nuovo i punti d'equilibrio dividono la curva in due metà, una al di sopra e una al di sotto dell'asse x . Di nuovo ci limitiamo a studiare il verso nella direzione x studiando separatamente i casi $y > 0$ e $y < 0$.

$$\dot{x} = 12\sqrt{1-x^2}(1-x^2)$$

da cui $\dot{x} > 0$; viceversa se $y < 0$ abbiamo

$$\dot{x} = 12\sqrt{1-x^2}(x^2-1)$$

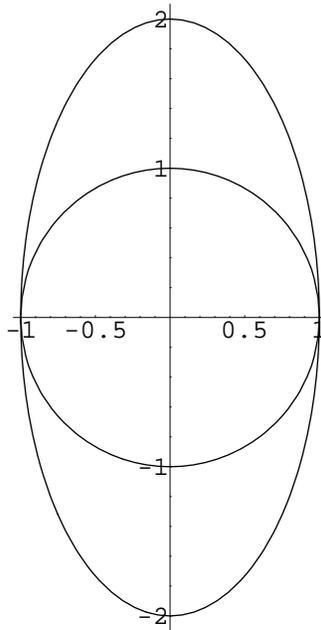


Figura 6: Grafico della curva di livello Γ_0

e quindi $\dot{x} < 0$. Osservando i versi di percorrenza lungo le separatrici, notiamo che i punti d'equilibrio P_1 e P_2 sono instabili.

(3.4) **Altre curve di livello.** Possiamo ottenere le altre curve di livello per continuità dai dati iniziali.

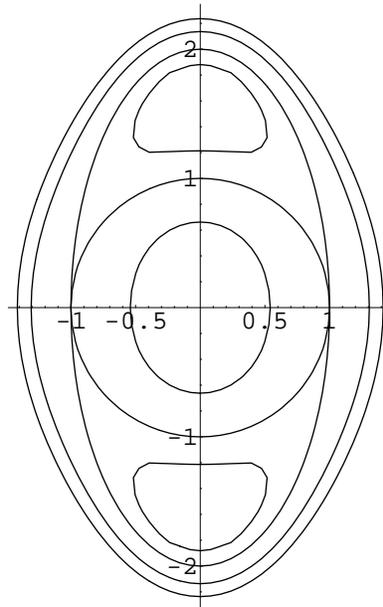


Figura 7: Piano delle fasi per il sistema

(3.5) **Periodicità delle traiettorie.** Certamente sappiamo che preso comunque un dato iniziale nelle regioni

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$U_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x^2 + y^2 > 1, x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \right\}$$

$$U_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0, x^2 + y^2 > 1, x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \right\}$$

esso darà origine ad un'orbita periodica. Per quanto riguarda invece la regione

$$U_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} > 1 \right\}$$

non siamo in grado di dire nulla trattandosi di una regione illimitata. Quindi se $H(x, y) \in (-\frac{9}{4}, 4) \setminus \{0\}$ sicuramente le traiettorie saranno periodiche, mentre se $H(x, y) \notin (-\frac{9}{4}, 4) \setminus \{0\}$ non possiamo dire nulla.