Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
Tutorato V - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.
(1.1) **Costante del moto.** Affinché $H(x,y)$ sia costante del moto, deve valere $\dot{H}=0$. Calcoliamo quindi la derivata totale di $H(x,y)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x,y)=\langle \nabla H,(\dot{x},\dot{y})\rangle$$

ma si vede facilmente che valgono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dot{y} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y}=\dot{x} \end{cases}$$

pertanto avremo

$$\langle \nabla H,(\dot{x},\dot{y})\rangle=\langle(-\dot{y},\dot{x}),(\dot{x},\dot{y})\rangle=-\dot{y}\dot{x}+\dot{x}\dot{y}=0$$

e quindi $H(x,y)$ è una costante del moto per il sistema.
(1.2) **Punti d'equilibrio.** Poiché si ha equilibrio per $\dot{x}=\dot{y}=0$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2xy=0 \\ (x^2-1)(5x^2-1)-y^2=0 \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo

$$x=0 \qquad y=0$$

Sostituendo nella seconda $x=0$ otteniamo $y^2=1$ e quindi $y=\pm1$. Sostituendo $y=0$ otteniamo $x=\pm1$ e $x=\pm\sqrt{5}/5$ Perciò i punti d'equilibrio del sistema saranno

$$\begin{array}{ccc} P_1=(0,1) & P_2=(0,-1) & P_3=(1,0) \\ P_4=(-1,0) & P_5=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},0\right) & P_6=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right) \end{array}$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Per determinare la stabilità dei punti d'equilibrio, cominciamo con lo studio del sistema linearizzato. Ricordiamo che la matrice del sistema linearizzato è

$$A(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} \end{pmatrix}$$

e quindi nel nostro caso avremo

$$A(x,y)=\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 4x(5x^2-3) & -2y \end{pmatrix}$$

Vediamo dunque cosa succede vicino ai punti d'equilibrio.

$$A(0,1)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori reali di segno opposto. Pertanto P_1 è un punto d'equilibrio instabile per il sistema.

$$A(0,-1)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi anche P_2 è un punto d'equilibrio instabile del sistema.

$$A(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 8 & 0\end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda)=\lambda^2-16$, quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2}=\pm 4$. Pertanto avremo che P_3 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A=(-1,0)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -4 & 0\end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda)=\lambda^2-16$, quindi, di nuovo, P_4 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A\left(\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -8\frac{\sqrt{5}}{5} & 0\end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda)=\lambda^2+16/5$ e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla, perciò il sistema linearizzato non da informazioni sulla stabilità di P_5. Infine

$$A\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)=\begin{pmatrix}0 & -2\frac{\sqrt{5}}{5}\\ 8\frac{\sqrt{5}}{5} & 0\end{pmatrix}$$

Di nuovo il polinomio caratteristico è $P(\lambda)=\lambda^2+16/$ duenque non abbiamo informazioni sulla stabilità di P_6. Rimane dunque da determinare se P_5 e P_6 sono stabili o meno. Consideriamo la matrice hessiana di $H(x,y)$, i.e.

$$\mathcal{H}(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}\\ \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x(3-5x^2) & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$$

che, calcolata in P_5 è

$$\mathcal{H}\left(\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)=\begin{pmatrix}8\frac{\sqrt{5}}{5} & 0\\ 0 & 2\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$$

e quindi, poiché $det(\mathcal{H})=16/5>0$ e $\mathcal{H}_{11}>0$ avremo che P_5 è un punto di minimo isolato per la funzione $H(x,y)$. Pertanto, se consideriamo la funzione

$$W(x,y)=H(x,y)-H(P_5)$$

avremo che $W(x,y)$ soddisfa le condizioni del teorema di Ljapunov rispetto a P_5 e quindi P_5 è un punto d'equilibrio stabile per il sistema.

Analogamente, calcolando l'hessiana in P_6 abbiamo

$$\mathcal{H}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)=\begin{pmatrix}-8\frac{\sqrt{5}}{5} & 0\\ 0 & -2\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$$

e, poiché $det\mathcal{H}=16/5>0$ e $\mathcal{H}_{11}<0$ avremo che P_6 è un punto di minimo isolato per la funzione $H(x,y)$. Quindi la funzione

$$W(x,y)=H(x,y)-H(P_6)$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_6 che quindi risulta essere un punto d'equilibrio stabile.
(1.3) **Curve di livello.** Cominciamo con il calcolare il valore di H nei punti instabili. Osserviamo che $H(P_i)=0\ \ \forall\, i=1,2,3,4$ ossia $H=0$ nei punti instabili. Studiamo quindi la curva

$$\Gamma_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x(y-x^2+1)(y+x^2-1)=0\}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2\cup\mathcal{C}_3$$

dove le curve $\mathcal{C}_i$ sono

$$\mathcal{C}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x=0\}$$
$$\mathcal{C}_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=x^2-1\}$$
$$\mathcal{C}_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=-x^2+1\}$$

perciò avremo 15 possibili traiettorie di cui 4 punti instabili e 11 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

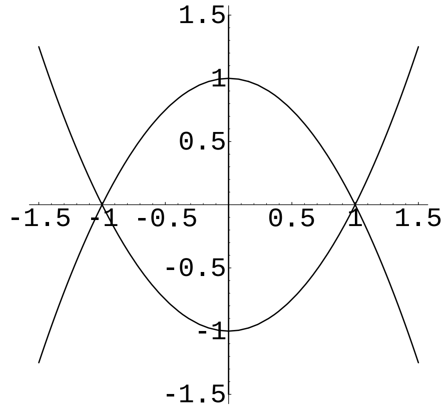

Figura 1: Grafico della curva di livello Γ_0

Versi di percorrenza. Analizziamo quindi i versi di percorrenza. Su $\mathcal{C}_1$, poiché $x \equiv 0$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 - y^2 \end{cases}$$

da cui si vede immediatamente che $\dot{y} > 0$ per $-1 < y < 1$ e minore di zero altrimenti. Su $\mathcal{C}_2$, invece, si ha $y = x^2 - 1$. Analizziamo solo il verso nella direzione x.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(x^2 - 1) \\ \dot{y} = (x^2 - 1)(5x^2 - 1) - (x^2 - 1)^2 \end{cases}$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per $-1 < x < 0$ e $x > 1$ e minore di zero altrimenti. Infine lungo $\mathcal{C}_3$ abbiamo $y = -x^+1$; analizziamo solo in verso nella direzione x.

$$\dot{x} = 2x(1 - x^2)$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per $0 < x < 1$ e $x < -1$ e minore di zero altrimenti.

Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello per dipendenza continua dai dati iniziali.

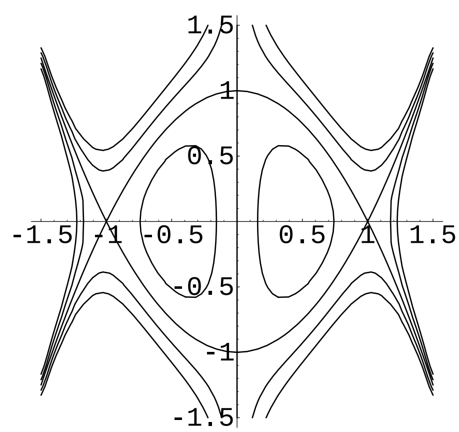

Figura 2: Piano delle fasi per il sistema

(1.4) **Traiettorie periodiche.** Sappiamo che se esiste una regione U che sia racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di H e contenga un unico punto d'equilibrio x_0 che sia stabile, allora ogni traiettoria $\varphi(t,\overline{x})$, con $\overline{x} \in U \setminus \{x_0\}$ è periodica, e si svolge su un orbita che contiene x_0 al suo interno. Quindi, i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono negli aperti

$$U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \ \ x^{-}1 < y < 1 - x^2\right\} \setminus \{P_5\}$$
$$U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 0, \ \ x^2 - 1 < y < 1 - x^2\right\} \setminus \{P_6\}$$

(1.5) **Soluzione esplicita.** Osserviamo immediatamente che il dato iniziale si trova sulla curva di livello $\mathcal{C}_1$ dove vale $\dot{x} = 0$. Pertanto si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = 1 - y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Separando le variabili, otteniamo

$$1 = \frac{\dot{y}}{1 - y^2}$$

quindi, integrando ambo i membri

$$\begin{aligned} t &= \int_2^y \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_2^x \mathrm{d}x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1+y|}{3|y-1|} \right) - \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{3(y-1)} \right) \end{aligned}$$

dato che la soluzione deve rimanere sulla retta $\mathcal{C}_1$ per $y > 1$. Tale relazione è facilmente invertibile. Risulta infatti

$$2t = \ln \left(\frac{y+1}{3(y-1)} \right) \Longrightarrow e^{2t} = \frac{y+1}{3(y-1)}$$

Perciò la soluzione esplicita è

$$y(t) = \frac{3e^{2t} + 1}{3e^{2t} - 1}$$

<u>ESERCIZIO 2.</u>

(2.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x,y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo quindi

$$H(x,y) = \int \mathrm{d}y \left(4 - x^2 - 3y^2\right) = 4y - yx^2 - y^3 + f(x)$$

con $f(x)$ da determinare. Derivando rispetto a x otteniamo

$$-\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} = -2xy + f'(x)$$

e quindi avremo $f'(x) = 0$ cioè $f(x)$ è una costante arbitraria che, per comodità imponiamo nulla. Perciò una costante del moto è

$$H(x,y) = 4y - yx^2 - y^3$$

(2.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 4 - x^2 - 3y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo $x = 0$ e $y = 0$. Sostituendo $x = 0$ nella prima, troviamo $4 - 3y^2 = 0$ e quindi $y = \pm 2\sqrt{3}/3$. Sostituendo invece $y = 0$, avremo $4 - x^2 = 0$ cioè $x = \pm 2$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema saranno

$$P_1 = (2, 0) \qquad P_2 = (-2, 0) \qquad P_3 = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \qquad P_4 = \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -6y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Vediamo quindi cosa accade vicino ai punti d'equilibrio.

$$A(2, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori reali di segno opposto e quindi P_1 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A(-2, 0) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

e quindi anche P_2, con le stesse argomentazioni di prima, risulta essere instabile.

$$A\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{12\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{48}{3}$ e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla. Perciò non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_3. Analogamente

$$A\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{12\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è di nuovo $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{48}{3}$, perciò non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_4. Dobbiamo studiare, quindi, la stabilità di P_4 e P_4. Riguardo a P_3 avemo che

$$\mathcal{H}(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{12\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

e, poicé $det(\mathcal{H}) > 0$ e $\mathcal{H} < 0$, allora P_3 è un punto di massimo isolato per H. Definita quindi la funzione

$$W(x, y) = H(P_3) - H(x, y)$$

si osserva immediatamente che $W(x, y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_3 che quindi è un punto d'equilibrio stabile. Analogamente avremo che

$$\mathcal{H}(P_4) = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{12\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

e, poicé $det(\mathcal{H}) > 0$ e $\mathcal{H} > 0$, allora P_4 è un punto di minimo isolato per H. Definita quindi la funzione

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_4)$$

si osserva immediatamente che $W(x, y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_4 che quindi è un punto d'equilibrio stabile.

(2.3) **Curve di livello.** Cominciamo con il calcolare il valore di H nei punti instabili. Osserviamo che $H(P_i) = 0 \ \forall\, i = 1, 2$ ossia $H = 0$ nei punti instabili. Studiamo quindi la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y(4 - x^2 - y^2) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

dove le curve $\mathcal{C}_i$ sono

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 4\}$$

perciò avremo 7 possibili traiettorie di cui 2 punti instabili e 5 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

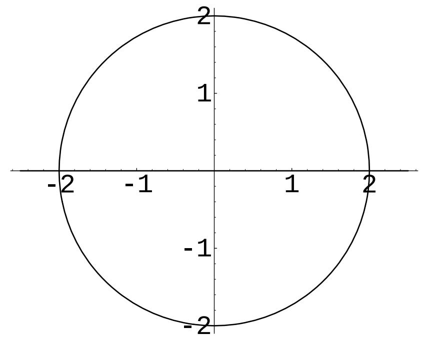

Figura 3: Grafico della curva di livello Γ_0

Versi di percorrenza. Analizziamo quindi i versi di percorrenza. Su $\mathcal{C}_1$, poiché $y \equiv 0$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x^2 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

da cui si vede immediatamente che $\dot{x} > 0 \; \forall - 2 < x < 2$. Su $\mathcal{C}_2$, analizzando solo il verso di percorrenza nella direzione x per semplicità.

$$\dot{x} = 2(x^2 - 4)$$

e quindi $\dot{x} < 0 \; \forall - 2 < x < 2$. Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello per dipendenza continua dai dati iniziali.

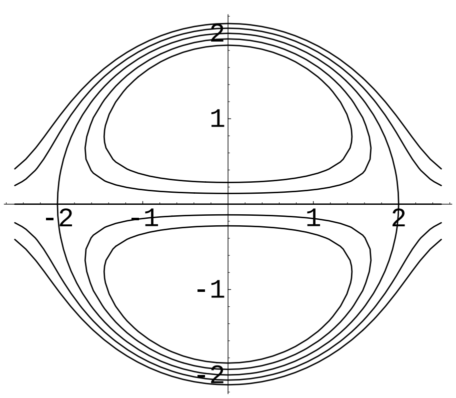

Figura 4: Piano delle fasi per il sistema

(2.4) **Traiettorie periodiche.** Per gli stessi argomenti usati in (1.4) sappiamo che i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono negli aperti

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, \ \ 0 < y < \sqrt{4 - x^2}\} \backslash \{P_3\}$$
$$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1 \ \ \sqrt{4 - x^2} < y < 0\} \backslash \{P_4\}$$

(2.5) **Soluzione esplicita.** Osserviamo immediatamente che il dato iniziale si trova sulla curva di livello $\mathcal{C}_1$ dove vale $\dot{y} = 0$. Pertanto si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Separando le variabili, otteniamo

$$1 = \frac{\dot{x}}{4 - x^2}$$

quindi, integrando ambo i membri

$$\begin{aligned} t &= \int_3^x \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y^4} \\ &= \frac{1}{4} \int_3^x \mathrm{d}y \left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{2+y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{|2+x|}{5|x-2|} \right) \qquad\qquad = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+x}{5(x-2)} \right) \end{aligned}$$

dato che la soluzione deve rimanere sulla retta $\mathcal{C}_1$ per $x > 2$. Tale relazione è facilmente invertibile. Risulta infatti

$$2t = \ln \left(\frac{x+1}{5(x-1)} \right) \Longrightarrow e^{2t} = \frac{x+1}{5(x-1)}$$

Perciò la soluzione esplicita è

$$x(t) = \frac{5e^{2t} + 1}{5e^{2t} - 1}$$

<u>Esercizio 3.</u>

(3.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x, y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{\theta} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo quindi

$$H(\theta, y) = -\int \mathrm{d}\theta \, (2 \sin\theta \cos\theta) = -\sin^2\theta + f(y)$$

con $f(y)$ da determinare. Derivando rispetto a y, otteniamo

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial y} = f'(y)$$

e quindi avremo $f'(y) = 2y$ cioè $f(y) = y^2 + c$ con c costante arbitraria che, per comodità imponiamo nulla. Perciò una costante del moto è

$$H(\theta, y) = y^2 - \sin^2\theta$$

(3.2) **Punti d'equilibrio.** Cerchiamo i punti in cui si annulla il campo vettoriale.

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2 \sin\theta \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo $y = 0$ mentre dalla seconda avremo $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = \pm\pi/2$. Quindi i punti d'equilibrio del sistema sono

$$P_0 = (0, 0) \qquad P_1 = (\pi, 0) \qquad P_2 = (\frac{\pi}{2}, 0) \qquad P_3 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è

$$A(\theta, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2\cos 2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

che calcolata in $(0,0)$ da

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$ e quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm 2$ perciò P_0 è un punto sd'equilibrio instabile.

$$A(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e di nuovo avremo che P_1 è un pun to d'equilibrio instabile.

$$A\left(0, \pm\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, perciò gli autovalori hanno entrambi parte reale uguale a zero quindi non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_3 e P_4. Consideriamo quindi la matrice hessiana di $H(\theta, y)$, i.e.

$$\mathcal{H}(\theta, y) = \begin{pmatrix} -2\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che calcolata in $P_{3,4}$ è

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

pertanto $P_{3,4}$ sono punti di minimo isolato per la costante del moto e $H(P_i) = -1$ per $i = 3, 4$. Definita la funzione

$$W(x, y) = H(P_i) + 1$$

si verifica immediatamente che W è una funzione di Ljapunov per $P_{3,4}$ che quindi sono stabili.
(3.3) **Curva di livello** Γ_0 Studiamo la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 - \sin^2\theta = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

dove le curve $\mathcal{C}_i$ sono

$$\mathcal{C}_1 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \ : \ y = \sin\theta\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \ : \ y = -\sin\theta\}$$

perciò avremo 6 possibili traiettorie di cui 2 punti d'equilibrio e 4 traiettorie che tendono ai punti d'equilibrio nel futuro e nel passato (eterocline).

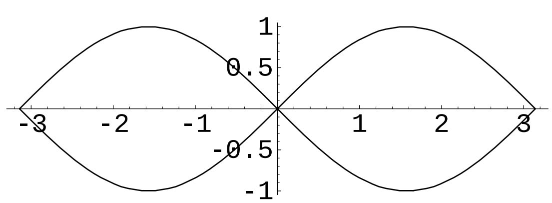

Figura 5: Grafico della curva di livello Γ_0

Versi di Percorrenza. Su $\mathcal{C}_1$ abbiamo $y = \sin\theta$. Analizziamo solo il verso di percorrenza nella direzione θ.

$$\dot{\theta} = 2\sin\theta$$

e quindi $\dot{\theta} > 0$ per $0 < \theta < \pi$ e negativo altrimenti. Su $\mathcal{C}_2$, abbiamo $y = -\sin\theta$ Di nuovo ci limitiamo a studiare il verso nella direzione θ

$$\dot{\theta} = 2\sin\theta$$

da cui $\dot{\theta} > 0$ per $-\pi < \theta < 0$ e negativo altrimenti.
(3.4) **Altre curve di livello.** Possiamo ottenere le altre curve di livello per continuità dai dati iniziali.

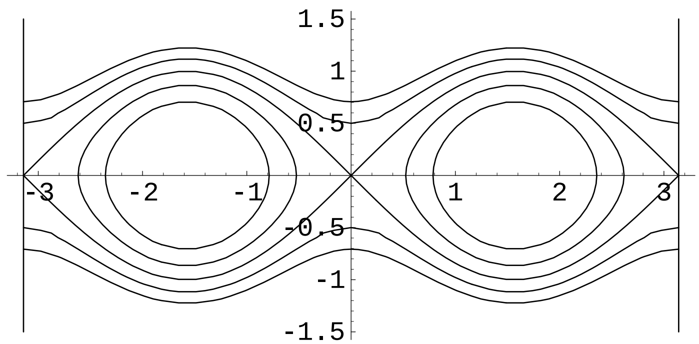

Figura 6: Piano delle fasi per il sistema

(3.5) **Periodicità delle traiettorie.** Certamente sappiamo che preso comunque un dato iniziale nelle regioni

$$U_2 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \ : \ 0 < \theta < \pi, \ -\sin\theta < y < \sin\theta\} \setminus \{P_2\}$$
$$U_3 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \ : \ -\pi < \theta < 0, \ \sin\theta < y < -\sin\theta\} \setminus \{P_3\}$$

esso darà origine ad un orbita periodica. Per quanto riguarda invece le regioni

$$U = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \ : \ y > \sin\theta, \ y > -\sin\theta\}$$
$$U' = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \ : \ y < \sin\theta, \ y < -\sin\theta\}$$

non siamo in grado di dire nulla trattandosi di regioni illimitate.