Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato VI - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

(1.1) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo che i punti d'equilibrio di una sistema gradiente sono tutti e soli i punti in cui il gradiente è nullo i.e. i punti della forma

$$\begin{cases} -4x^3+4x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

Risolvendo troviamo quindi i punti $P_0=(0,0)$ $P_1=(1,0)$ $P_2=(-1,0)$

Stabilità. Consideriamo intanto il sistema lineare associato dato dalla matrice

$$A(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vediamo dunque cosa succede intorno ai punti d'equilibrio.

$$A(0,0)=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che è già in forma diagonale con autovalori reali negativi; pertanto P_0 è un punto stabile.

$$A(\pm 1,0)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autvalori reali di cui uno strettamente positivo; pertanto P_1 e P_2 sono punti instabili. Verifichiamo ora che P_0 è asintoticamente stabile. Sia

$$W(x,y)=V(x,y)-V(0,0)=y^2-x^4+2x^2$$

Notiamo immediatamente che $W(x,y)$ è una funzione di Ljapunov per P_0 dunque, per il teorema di Ljapunov, P_0 è asintoticamente stabile.

(1.2) **Curve di livello.** Sappiamo che nei punti regolari del sistema si ha che ∇V è ortogonale alle curve di livello di V. Perciò poiché le velocità sono uguali a $-\nabla V$ in ogni punto, le traiettorie saranno ortogonali alle curve di livello di ∇V e saranno dirette in senso opposto al gradiente.

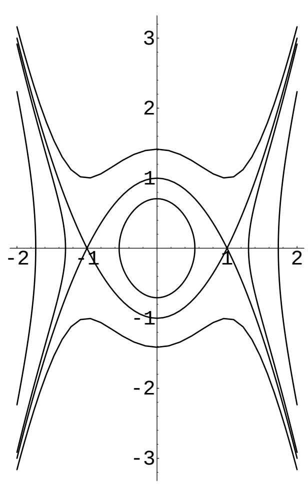

Figura 1: Curve di livello.

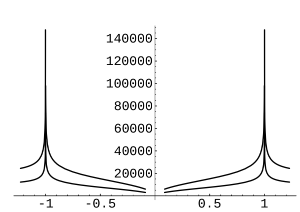

Figura 2: Piano delle fasi.

(1.3) **Bacino d'attrazione.** Utilizzando la funzione di Ljapunov definita in (1.1) vediamo che $\dot{W} < 0$ su $B(1, P_0) \backslash \{P_0\}$ e quindi, per il terzo punto del teorema di Ljapunov, $B(1, P_0)$ è contenuto nel bacino d'attrazione di P_0.

<u>Esercizio 2.</u>
(2.1) **Costante del moto.** Affinché $H(x, y)$ sia costante del moto, deve valere $\dot{H} = 0$. Calcoliamo quindi la derivata totale di $H(x, y)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x, y) = \langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle$$

ma si vede facilmente che valgono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \end{cases}$$

pertanto avremo

$$\langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = \langle (-\dot{y}, \dot{x}), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} = 0$$

e quindi $H(x, y)$ è una costante del moto per il sistema.
(2.2) **Punti d'equilibrio.** Poiché si ha equilibrio per $\dot{x} = \dot{y} = 0$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2y(x^2 - 1)(2x^2y^2 - x^2 - 1) = 0 \\ 2x(1 - y^2)(2x^2y^2 - y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo

$$x = \pm 1 \qquad y = 0 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2y^2 - 1}}$$

Sostituendo nella seconda $x = \pm 1$ otteniamo $y^2 = 1$ e quindi $y = \pm 1$. Sostituendo $y = 0$ otteniamo $x = 0$. Infine, sostituendo $x = \pm\sqrt{1/(2y^2 - 1)}$ troviamo $y = \pm 1$ che risostituito nella prima da $x = \pm 1$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema saranno

$$\begin{array}{ccc} P_0 = (0, 0) & P_1 = (1, 1) & P_2 = (1, -1) \\ P_3 = (-1, 1) & & P_4 = (-1, -1) \end{array}$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Per determinare la stabilità dei punti d'equilibrio, cominciamo con lo studio del sistema linearizzato. Ricordiamo che la matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

e quindi nel nostro caso avremo

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy(2x^2y^2 - x^2 - y^2) & 2(x^2 - 1)(6x^2y^2 - x^2 - 1) \\ 2(1 - y^2)(6x^2y^2 - y^2 - 1) & -8xy(2x^2y^2 - x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

Vediamo dunque cosa succede vicino ai punti d'equilibrio.

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$, quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm 2i$; pertanto non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_0 dal solo studio del sistema linearizzato.

$$A(1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi anche in questo caso non possiamo dire nulla sulla stabilità dei punti. Infine

$$A(-1,\pm) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di nuovo non possiamo dire nulla sulla stabilità dei punti. Concludendo, il sistema linearizzato non ci ha dato informazioni sulla stabilità dei punti d'equilibrio del sistema e dovremo fare un'analisi ad ordini più elevati. Consideriamo quindi la matrice hessiana di $H(x,y)$, i.e.

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\ \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y^2-1)(6x^2y^2-y^2-1) & 8xy(2x^2y^2-x^2-y^2) \\ 8xy(2x^2y^2-x^2-y^2) & 2(x^2-1)(6x^2y^2-x^2-1) \end{pmatrix}$$

che, calcolata in P_0 è

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi, poiché $det(\mathcal{H}) = 16/5 > 0$ e $\mathcal{H}_{11} < 0$ avremo che P_0 è un punto di massimo isolato per la funzione $H(x,y)$. Pertanto, se consideriamo la funzione

$$W(x,y) = H(0) - H(x,y)$$

avremo che $W(x,y)$ è una funzione di Ljapunov rispetto a P_0 e quindi P_0 è un punto d'equilibrio stabile per il sistema. D'altra parte, per quanto riguarda P_i per $i = 1, \dots, 4$, non possiamo dire nulla neanche mediante il teorema di Ljapunov. Infatti $\mathcal{H}(P_i) = (0)_{jk}$ e quindi dovremmo cercare una funzione di Ljapunov indipendentemente dalla costante del moto, il che non è banale. Cercheremo pertanto di determinare la stabilità di tali punti dallo studio qualitativo delle curve di livello.
(2.3) **Curve di livello.** Cominciamo con il calcolare il valore di H nei punti instabili. Osserviamo che $H(P_i) = 0 \ \ \forall\, i = 1,2,3,4$ ossia $H = 0$ nei punti instabili. Studiamo quindi la curva

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x^2-1)(y^2-1)(x^2y^2-1) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5 \cup \mathcal{C}_6$$

dove le curve $\mathcal{C}_i$ sono

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1\} & \mathcal{C}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = -1\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1\} & \mathcal{C}_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -1\} \\ \mathcal{C}_5 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \frac{1}{x}\right\} & \mathcal{C}_6 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -\frac{1}{x}\right\} \end{aligned}$$

perciò avremo 24 possibili traiettorie di cui 4 punti instabili e 20 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

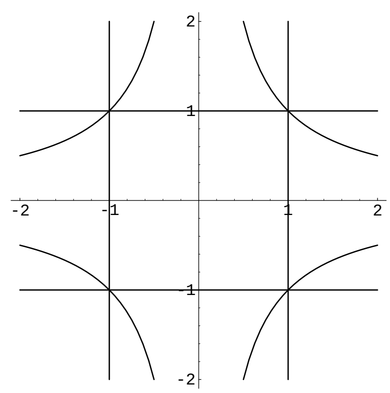

Figura 3: Grafico della curva di livello Γ_0

Versi di percorrenza. Analizziamo quindi i versi di percorrenza. Su $\mathcal{C}_1$, poiché $x \equiv 1$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -2(y^2-1)^2 \end{cases}$$

da cui si vede immediatamente che $\dot{y} < 0$ per ogni valore di y. Su $\mathcal{C}_2$, poiché $x \equiv -1$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 2(y^2 - 1)^2 \end{cases}$$

e quindi $\dot{y} > 0$ per ogni valore di y. Su $\mathcal{C}_3$, da $y \equiv 1$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per ogni valore di x; viceversa su $\mathcal{C}_4$, da $y \equiv -1$ troviamo

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

perciò $\dot{x} < 0$ per ogni valore di x. Su $\mathcal{C}_5$, poiché $y = 1/x$ troviamo

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2}{x}(x^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = 2x\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 \end{cases}$$

Analizzando solo il verso di percorrenza nella direzione x notiamo che $\dot{x} > 0$ per $x < 0$ e negativo altrimenti (il che è consistente con uno studio fatto esclusivamente nella direzione y). Infine su $\mathcal{C}_6$, da $y = -1/x$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2}{x}(x^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = -2x\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 \end{cases}$$

e quindi studiando solo il verso di percorrenza nella direzione x vediamo che $\dot{x} > 0$ per $x > 0$ e negativo altrimenti. Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello per dipendenza continua dai dati iniziali.

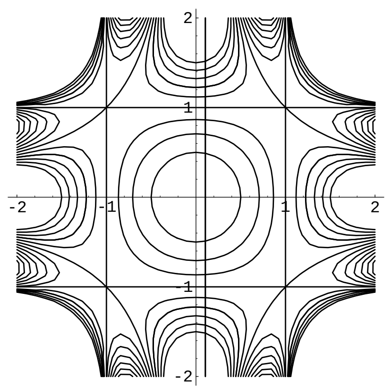

Figura 4: Piano delle fasi per il sistema

(2.4) **Traiettorie periodiche.** Sappiamo che se esiste una regione U che sia racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di H e contenga un unico punto d'equilibrio x_0 che sia stabile, allora ogni traiettoria $\varphi(t, \overline{x})$, con $\overline{x} \in U \setminus \{x_0\}$ è periodica, e si svolge su un orbita che contiene x_0 al suo interno. Quindi, i dati iniziali che sicuramente danno origine a traiettorie periodiche sono nell'aperto

$$U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, \ \ -1 < y < 1\} \setminus \{P_0\}$$

<u>Esercizio 3.</u> Si veda la dimostrazione del teorema 20.32 sulle dispense.

Esercizio 4.

(4.1) **Punti d'equilibrio.** Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2x - y^2 = 0 \\ -y - x^2 = 0 \end{cases}$$

trovando quindi i due punti $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{4})$.

Stabilità. Cominciamo con lo studio del sistema linearizzato, che è dato dalla matrice

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2y \\ -2x & -1 \end{pmatrix}$$

e vediamo cosa succede intorno ai punti d'equilibrio.

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori reali strettamente negativi e quindi P_0 è un punto asintoticamente stabile.

$$A\left(-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{4}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt[3]{4} \\ 2\sqrt[3]{2} & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 2$ e quindi le sue radici sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

e quindi esiste una radice reale strettamente positiva; perciò P_1 è un punto instabile.

(4.2) **Bacino d'attrazione.** Definiamo la funzione

$$W(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

e osserviamo che W è una funzione di Ljapunov per P_0; infatti $W(P_0) = 0$ e chiaramente $W(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$. Inoltre

$$\dot{W}(x,y) = -2x^2 - y^2 - xy^2 - x^2 y = -x^2(y+2) - y^2(x+1)$$

e quindi $\dot{W}(0,0) = 0$ mentre $\dot{W} < 0$ se $x > -1$ e $y > -2$. Pertanto abbiamo che $\dot{W} < 0$ su $B_1(0) \setminus \{0\}$ perciò, per il teorema di Ljapunov, $B_1(0)$ è contenuto nel bacino d'attrazione di P_0.