Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VII - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Sistema dinamico asociato.** Ponendo $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = x^2(2x^4 - 7x^2 + 3)e^{-x^2} \end{cases}$$

(1.2) **Costante del moto.** $E(x, y)$ è costante del moto se $\dot{E} = 0$. Ma

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} = -x^2(2x^4 - 7x^2 + 3)e^{-x^2}y + yx^2(2x^4 - 7x^2 + 3)e^{-x^2} = 0$$

quindi $E(x, y)$ è una costante del moto.

(1.3) **Intersezioni con gli assi.** Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x^5 - x^3)e^{-x^2} = 0 \end{cases}$$

otteniamo $V(x) = 0$ per $x = 0$, $x = \pm 1$. Dunque i punti d'intersezione sono l'origine degli assi e i punti $P_\pm = (\pm 1, 0)$.

Simmetrie. Osserviamo che $V(-x) = -V(x)$ e dunque il potenziale è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Andamento all'infinito.

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = 0$$

Punti critici. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$ per $x = 0$ e $2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ cioè $x = \pm\sqrt{3}$ e $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Inoltre $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} < 0$ per $x > \sqrt{3}$, $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ e $x < \sqrt{3}$ quindi avremo che $x = -\sqrt{3}$ e $x = 1/\sqrt{2}$ sono punti di minimo del potenziale, $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{3}$ sono punti di massimo e $x = 0$ è un punto di sella.

Grafico del potenziale.

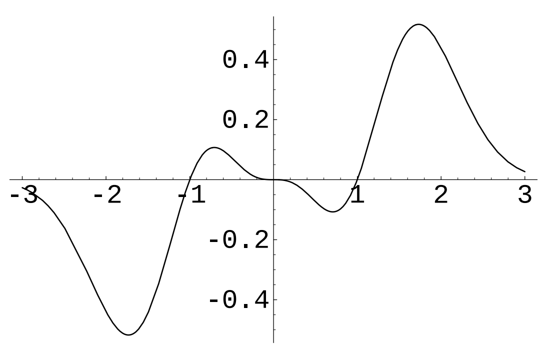

Figura 1: Grafico del potenziale $V(x)$.

(1.4) **Punti d'equilibrio.** Poiché si ha equilibrio per $\dot{x} = \dot{y} = 0$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2(2x^4 - 7x^2 + 3)e^{-x^2} = 0 \end{cases}$$

ossia cerchiamo i punti critici di $V(x)$. Per quanto visto al punto precedente, i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato saranno

$$P_0 = (0,0) \qquad P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad P_3 = (\sqrt{3}, 0), \qquad P_4 = (-\sqrt{3}, 0)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Perciò avremo che P_1 e P_4 sono stabili mentre P_0, P_2 e P_3 sono instabili.
(1.5) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $V(-\sqrt{3}) < V(1/\sqrt{2})$ quindi $x = -\sqrt{3}$ risulta essere un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano delle fasi sarà possibile solo per $E \geq V(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}e^{-3}$. Avremo quindi

- Per $E = V(-\sqrt{3})$ il solo punto d'equilibrio stabile P_4.
- Per $V(-\sqrt{3}) < E < V(1/\sqrt{2})$ una traiettoria periodica intorno al punto d'equilibrio stabile P_4.
- Per $E = V(1/\sqrt{2})$ una traiettoria periodica intornao a P_4 e il punto d'equilibrio stabile P_1.
- Per $V(1/\sqrt{2}) < E < 0$ una traiettoria periodica intorno a P_4 ed una intorno a P_1.
- Per $E = 0$ una traiettoria omoclina a cuspide intorno a P_1, una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ e il punto d'equilibrio instabile P_0.
- $0 < E < V(-1/\sqrt{2})$ una traiettoria periodica intorno a P_1, una aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, ed un altra, sempre aperta, con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E = V(-1/\sqrt{2})$, poiché $V''(-1/\sqrt{2}) \neq 0$, due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, una traiettoria omoclina non-cuspide, il punto d'equilibrio instabile P_2 e una traiettoria aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $V(-1/\sqrt{2}) < E < V(\sqrt{3})$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed un'altra, sempre aperta, con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E = V(\sqrt{3})$ due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, il punto instabile P_3 e due traiettorie aperte con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E > V(\sqrt{3})$ due traiettorie aperte di cui, una con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$ mentre l'altra con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$

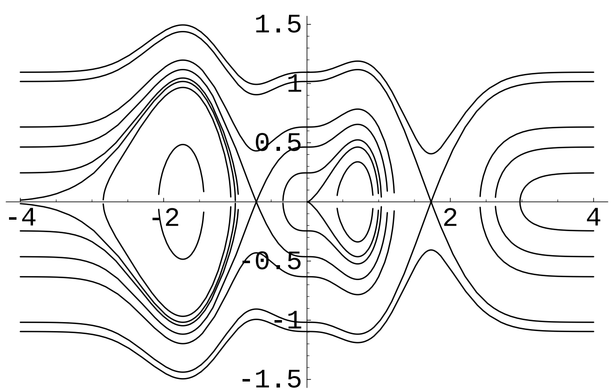

Figura 2: Grafico del piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano in cui $y > 0$.
(1.6) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente abbiamo traiettorie periodiche per

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < \sqrt{3}, \ V(-\sqrt{3}) < \frac{y^2}{2} + V(x) < 0\}$$

$$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1/\sqrt{2} < x < \sqrt{3}, \ 0 < \frac{y^2}{2} + V(x) < V(-1/\sqrt{2})\}$$

Esercizio 2.

(2.1) **Sistema dinamico asociato.** Ponendo $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -4x^3 - \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

(2.2) **Costante del moto.** $E(x, y)$ è costante del moto se $\dot{E} = 0$. Ma

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} = \left(4x^3 + \frac{1}{x^2}\right) y + y\left(-4x^3 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

quindi $E(x, y)$ è una costante del moto.

(2.3) **Intersezioni con gli assi.** Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^4 - \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

otteniamo $V(x) = 0$ per $x = 1$, dunque l'unico punto d'intersezione è $P = (1, 0)$.

Andamento all'infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} V(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} V(x) = +\infty$$

Punti critici. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$ per $x = -1/\sqrt[5]{4}$ che quindi è l'unico punto critico del potenziale. Inoltre $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} > 0$ per $x > -1/\sqrt[5]{4}$ perciò avremo che $x = -1/\sqrt[5]{4}$ è un punto di minimo del potenziale.

Grafico del potenziale.

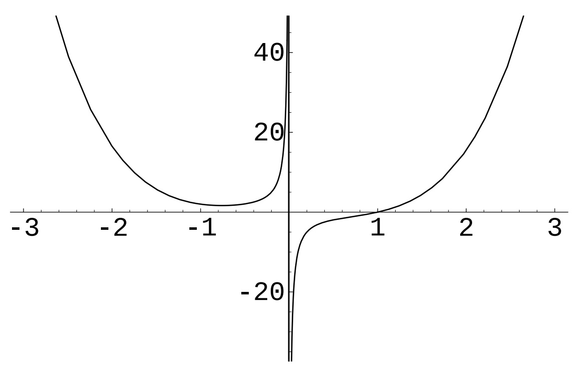

Figura 3: Grafico del potenziale $V(x)$.

(2.4) **Punti d'equilibrio e stabilità.** I punti d'equilibrio del sistema dinamico associato sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico del potenziale, quindi l'unico punto d'equilibrio è $P = (-1/\sqrt[5]{4}, 0)$ che risulta essere stabile per il teorema di Dirichlet.

(2.5) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $inf_{x\in\mathbb{R}}V(x) = -\infty$ quindi il moto nel piano delle fasi è possibile per ogni valore dell'energia. In particolare avremo

- Per $E < V(-1/\sqrt[5]{4})$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \pm\infty$.
- Per $E = V(-1/\sqrt[5]{4})$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \pm\infty$ e il punto d'equilibrio stabile P.
- Per $E > V(-1/\sqrt[5]{4})$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \pm\infty$ e una traiettoria periodica intorno al punto stabile P.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano in cui $y > 0$.

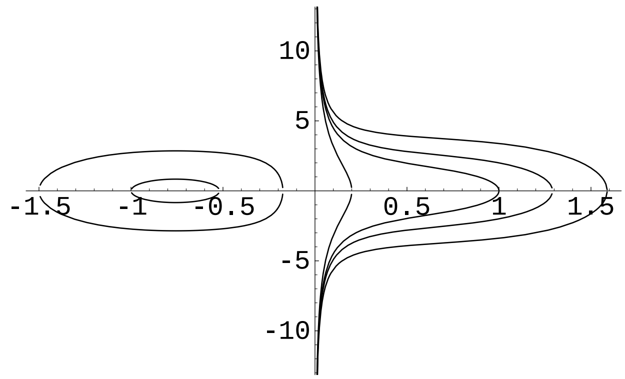

Figura 4: Grafico del piano delle fasi.

(2.6) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente avremo traiettorie periodiche nell'aperto

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, \ \ E(x, y) > V(-1/\sqrt[5]{4})\}$$

<u>Esercizio 3.</u> (3.1) **Sistema dinamico asociato.** Ponendo $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 10x \end{cases}$$

(3.2) **Simmetrie.** Osserviamo che $V(-x) = V(x)$ quindi il potenziale è simmetrico rispetto all'asse verticale.
Andamento all'infinito.

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = -\infty$$

Punti critici. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Inoltre $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} > 0$ per $x < -\sqrt{5/2}$ e per $0 < x < \sqrt{5/2}$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo mentre $x = \pm\sqrt{5/2}$ sono punti di massimo del potenziale.
Grafico del potenziale.

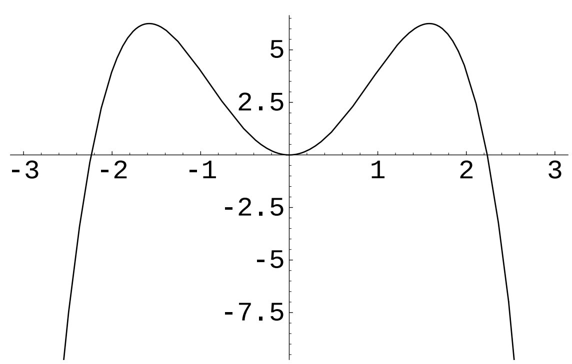

Figura 5: Grafico del potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$. Si noti che il valore di α indica semplicemente la posizione del potenziale rispetto all'asse x.

(3.3) **Punti d'equilibrio e stabilità.** Poiché si ha equilibrio per i punti $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di $V(x)$, per quanto visto al punto precedente, i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato saranno

$$P_0 = (0, 0) \qquad P_1 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Perciò avremo che P_0 è stabile mentre P_1 e P_2 sono instabili. Notiamo inoltre che $V(\sqrt{5/2}) = V(-\sqrt{5/2})$ e che $V''(x) \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

(3.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) = -\infty$ quindi il moto nel piano delle fasi è possibile per ogni valore dell'energia. In particolare avremo

- Per $E < V(0)$ due traiettorie aperte.
- Per $E = V(0)$ due traiettorie aperte e il punto d'equilibrio stabile P_0.
- Per $V(0) < E < V(\sqrt{5/2})$ una traiettoria periodica intornao a P_0 e due traiettorie aperte.
- Per $E = V(\sqrt{5/2})$ due traiettorie eterocline non-cuspidi, quattro traiettorie aperte e i puni instabili P_1 e P_2.
- Per $E > V(\sqrt{5/2})$ due traiettorie aperte, una tutta contenuta nel semipiano $y > 0$ e l'altra, simmetrica alla prima rispetto all'asse x.

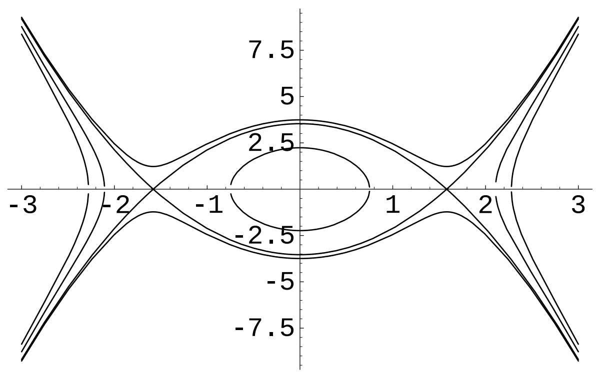

Figura 6: Grafico del piano delle fasi. Osserviamo che il valore di α è irrilevante nel piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano in cui $y > 0$.

(3.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente abbiamo traiettorie periodiche per

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2},\ V(0) < \frac{y^2}{2} + V(x) < V(\sqrt{5/2})\}$$

(3.6) **Esistenza di una traiettoria periodica.** Per $\alpha = 4$ abbiamo

$$V(x) = -(x^4 - 5x^2 + 4) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$$

quindi $V(0) = -4$ e $V(\sqrt{5/2}) = 21/4$ perciò $-4 < E < 21/4$ e dunque, per quanto visto al punto precedente, esiste una traiettoria periodica a tale livello di energia.

(3.7) **Periodo come integrale definito.** Imponendo $V(x) = 0$ troviamo i punti $x = \pm 1$ e $x = \pm 4$. Affinché sia soddisfatta la condizione di esistenza della traiettoria periodica, deve valere $-\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}$, quindi i punti sulla traiettoria periodica sono $x_\pm = \pm 1$. Il periodo di tale traiettoria sarà quindi

$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$$

Stima del periodo. Notiamo che $E - V(x) = -V(x) = (1 - x^2)(4 - x^2) = (x + 1)(1 - x)(4 - x^2)$ che è quindi della forma $(x - x_-)(x_+ - x)\phi(x)$ con $\phi(x) = 4 - x^2$ e inoltre $3 \leq \phi(x) \leq 4 \ \forall x \in [-1, 1]$ perciò una stima del periodo è data da

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\pi$$