Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
Tutorato VIII - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. **Energia potenziale.** Poicé deve valere $\ddot{x} = -V'(x)$, il potenziale è dato dall'integrale del secondo membro dell'equazione cambiato di segno, i.e.

$$V(x) = \int_0^x \mathrm{d}x \, \frac{-x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

e integrando otteniamo

$$V(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} + c$$

dove c è una costante d'integrazione arbitraria. Imponendo poi $V(0) = -1/2$ troviamo $c = 0$.

(1.1) **Traiettoria periodica.** Osserviamo che sono verificate le ipotesi del lemma (27.18). Innanzitutto vediamo che, ponendo

$$\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} = -\frac{1}{5}$$

troviamo $x_\pm = (-3 \pm \sqrt{21})/2$; osserviamo inoltre che $V(x) \leq E$ se e solo se $x \in [x_-, x_+]$. Infine notiamo che $x_\pm$ non sono punti critici si $V(x)$, infatti

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x_-) = -\frac{2(21 + 5\sqrt{21})}{25(5 + \sqrt{21})^2} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x_+) = \frac{2(21 - 5\sqrt{21})}{25(5 - \sqrt{21})^2} \neq 0$$

quindi, per il lemma (27.18) il moto su Γ_E è periodico.
(1.2)**Stima del periodo.** Notiamo che

$$E - V(x) = (x - x_-)(x_+ - x)\phi(x) \qquad \text{con} \qquad \phi(x) = \frac{1}{5(x^2 - 2x + 2)}$$

Inoltre ϕ è strettamente crescente nell'intervallo $[x_-, x_+]$ e quindi avremo che

$$\phi(x_-) = 2/[25(5 + \sqrt{21})] \leq \phi(x) \leq 2/[25(5 - \sqrt{21})] = \phi(x_+) \qquad \forall x \in [x_-, x_+]$$

pericò una stima del periodo è data da

$$5\pi\sqrt{5 - \sqrt{21}} \leq T \leq 5\pi\sqrt{5 + \sqrt{21}}$$

Notiamo che non si tratta certamente di una stima ottimale; infatti, un'approssimazione numerica di tale stima è

$$10.1487 \leq T \leq 48.6252$$

(1.3) **Punti d'equilibrio.** Considerato il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \end{cases}$$

i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico del potenziale; pertanto dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 0$$

e questa ha soluzione per $x = 0$ e $x = 2$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema sono i punti $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (2, 0)$.

Stabilità dei punti d'equilibrio. Il teorema di Dirichlet ci assicura che i punti d'equilibrio sono stabili se e solo se x_0 è un punto di minimo del potenziale. Derivando ulteriormente il potenziale otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^3}$$

e $[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2](0) = 1/2 > 0$ quindi $x = 0$ è un punto di minimo del potenziale, pertanto P_0 sarà un punto d'equilibrio stabile per il sistema. D'altra parte, $[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2](2) = -1/2 < 0$ quindi $x = 2$ è un punto di massimo per il potenziale, quindi P_1 sarà un punto d'equilibrio instabile.
(1.4)**Intersezioni con gli assi.** $V(0) = -1/2$ e $V(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.
Andamento all'infinito.

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = 0$$

Grafico del potenziale.

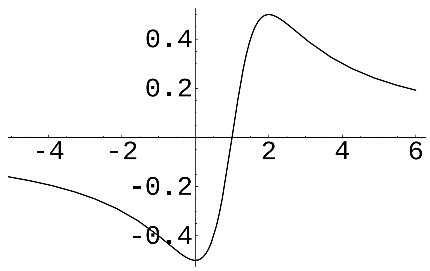

Figura 1: Grafico del piano del potenziale $V(x)$.

Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre $x = -1/2$ è un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano dell fasi sarà possibile solo per $E \geq -1/2$. Avremo quindi

- Per $E = -1/2$ il solo punto d'equilibrio sttabile P_0.
- Per $-1/2 < E < 0$ una triettoria periodica intorno al punto stabile P_0.
- Per $E = 0$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.
- Per $0 < E < 1/2$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed un'altra, sempre aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E = 1/2$ due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, il punto instabile P_1 e due traiettorie aperte con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$
- Per $E > 1/2$ due traiettorie di cui, una con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$, e l'altra con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$

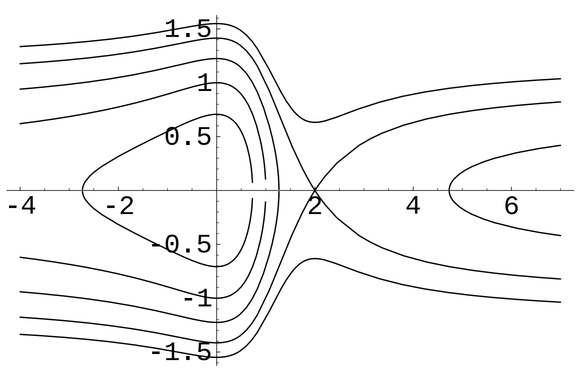

Figura 2: Grafico del piano delle fasi.

Esercizio 2. Nel seguito lavoreremo solo nell'intervallo $(-3\pi/2, 3\pi/2]$. Chiaramente, i risultati ottenuti si estendono per periodicità a tutta la retta reale.

(2.1) **Sistema dinamico associato.** Avendo posto $y = \dot{x}$, otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \cos x(x - \sin x) \end{cases}$$

(2.2) **Simmetrie.** Osserviamo che $V(-x) = V(x)$ e dunque il potenziale è simmetrico rispetto all'asse verticale

Punti critici. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm 3\pi/2$. Inoltre $dx > 0$ per $-3\pi/2 < x < -\pi/2$ e $0 < x < \pi/2$, perciò $x = 0$ e $x = 3\pi/2$ sono punti di minimo, mentre $x = \pm\pi/2$ sono punti di massimo **Grafico del potenziale.**

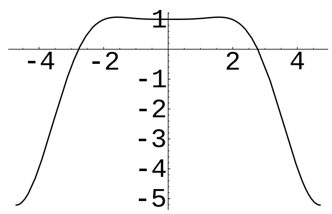

Figura 3: Grafico del potenziale $V(x)$.

(2.3) **Punti d'equilibrio.** In generale i punti d'equilibrio sono tutti e soli della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico del potenziale quindi, per quanto visto al punto precedente, i punti d'equilibrio sono i punti

$$P_0 = (0,0) \quad P_1 = \left(\tfrac{3\pi}{2}, 0\right) \quad P_2 = \left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) \quad P_3 = \left(-\tfrac{\pi}{2}, 0\right)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Per il teorema di Dirichlet, P_0 e P_1 sono stabili, mentre P_2 e P_4 sono instabili.

(2.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre $x = 3\pi/2$ è un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano dell fasi sarà possibile solo per $E \geq -(1 + 3\pi)/2$. Avremo quindi

- Per $E = -(1 + 3\pi)/2$ il solo punto d'equilibrio stabile P_1.
- Per $-(1 + 3\pi)/2 < E < 1$ una traiettoria periodica intorno al punto stabile P_1.
- Per $E = 1$ una traiettoria periodica intorno al punto stabile P_1 e il punto stabile P_0.
- Per $1 < E < (\pi - 1)/2$ una traiettoria periodica intorno a P_1 ed una, sempre periodica, intorno a P_0.
- Per $E = (\pi - 1)/2$ quattro traiettorie eterocline che si intersecano nei punti instabili con tangenza obliqua (essendo $[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2](\pm\pi/2) = 1 - \pi/2 \neq 0$), e gli stessi punti instabili P_2 e P_3.
- Per $E > (\pi - 1)/2$ due traietorie periodiche, una tutta contenuta ne semipiano $y > 0$ e l'altra simmetrica alla prima rispetto all'asse x.

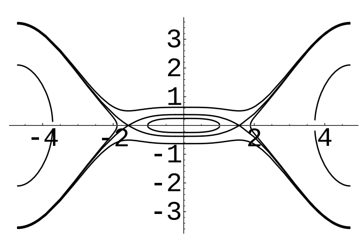

Figura 4: Grafico del piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano superiore e negativo altrimenti.
(2.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente abbiamo traiettorie periodiche per tutti i valori di energia eccetto per $E = (\pi - 1)/2$. In particolare, se $E \neq (\pi - 1)/2$, ogni dato iniziale da origine ad una traiettoria periodica se si escludono i punti d'equilibrio stabili.

ESERCIZIO 3.
(3.1) **Sistema dinamico associato.** Avendo posto $y = \dot{x}$, otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2)e^x \end{cases}$$

(3.2)**Intersezioni con gli assi.** Notiamo innanzitutto che

$$V(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 5)e^x$$

perciò $V(x) = 0$ se e solo se $x = 1$, mentre $V(0) = 5$.
Andamento all'infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = +\infty$$

Punti critici. Notiamo che $\frac{dV}{dx} = (x+1)^2(x-1)(x+2)e^x$ e quindi $\frac{dV}{dx} = 0$ per $x = -2$ e $x = \pm 1$. Inoltre $\frac{dV}{dx} > 0$ per $x < -2$ e $x > 1$, perciò $x = -2$ è un punto di massimo, $x = -1$ è un punto di sella, mentre $x = 1$ è un punto di minimo.
Grafico del potenziale.

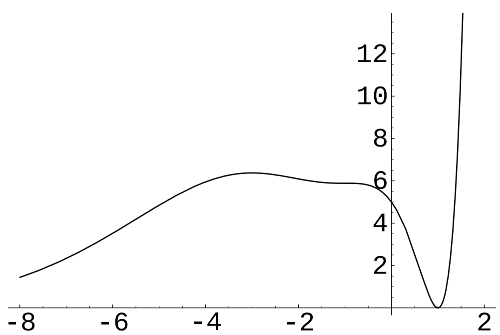

Figura 5: Grafico del potenziale $V(x)$.

(3.3) **Punti d'equilibrio.** In generale i punti d'equilibrio sono tutti e soli della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico del potenziale quindi, per quanto visto al punto precedente, i punti d'equilibrio sono i punti

$$P_1 = (-2, 0) \quad P_2 = (-1, 0) \quad P_3 = (1, 0)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale. Perciò P_3 è l'unico punto stabile, mentre P_1 e P_2 sono instabili.
(3.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre $x = 0$ è un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano dell fasi sarà possibile solo per $E \geq 0$. Avremo quindi

- Per $E = 0$ il solo punto d'equilibrio stabile P_3.
- Per $0 < E < 16e^{-1}$ una traiettoria periodica intorno a P_3 ed una aperta con $\lim_{x \to \infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E = 16e^{-1}$ una traiettoria omoclina a cuspide, una traiettoria aperta con $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ e il punto stabile P_2.
- Per $16e^{-1} < E < 45e^{-2}$ una traiettoria periodica ed una aperta con $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

- Per $E = 45e^{-2}$ due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed una omoclina che interseca le due traiettorie aperte nel punto instabile con tangenza obliqua (essendo $[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2](\pm\pi/2) = 1/e^{-2} \neq 0$), e lo stesso punto instabile P_1.
- Per $E > 45e^{-2}$ una traietoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

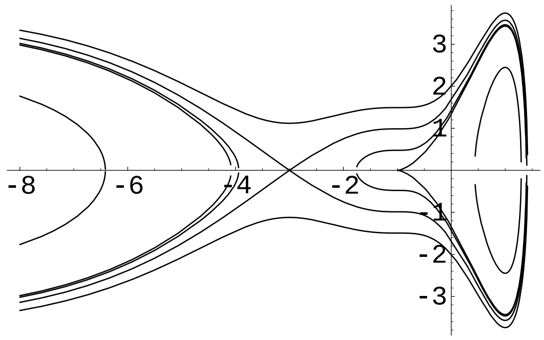

Figura 6: Grafico del piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano superiore e negativo altrimenti.
(3.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente, abbiamo traiettorie periodiche per

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > -1, 0 < \frac{y^2}{2} + V(x) < 16e^{-1}\}$$
$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > -2, 16e^{-1} < \frac{y^2}{2} + v(x) < 45e^{-2}\}$$