

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO X - LIVIA CORSI (10-05-06)

ESERCIZIO 1. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{6\rho^6} - \frac{1}{4\rho^4}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare di α si discutano i seguenti punti.

- (1.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (1.2) Determinare i punti d'equilibrio per il sistema e discuterne la stabilità.
- (1.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.
- (1.4) Studiare qualitativamente le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (1.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (1.6) Discutere le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 2. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{2(\rho^2 + 1)}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare di α , discutere i seguenti punti.

- (2.1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (2.2) Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
- (2.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (2.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (2.6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 3. Si considerino due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = 2$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \rho^2 - \rho^6$$

dove $\rho = |r|$ e $r = r_1 - r_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti

- (3.1) Descrivere il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà (descrivibile attraverso le due variabili polari (ρ, θ)).
- (3.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Discutere il moto della variabile $\rho(t)$ e analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.4) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.5) Scrivere la variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$ e dire sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.