

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO XII - LIVIA CORSI (24-05-06)

ESERCIZIO 1. Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ che ruoti in senso orario intorno all'asse ζ con velocità angolare $\omega_0 > 0$ costante mentre l'origine O' si muove lungo l'ellisse $\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, z = 0 \right\}$, secondo la legge oraria $r_{O'}(t) = (\rho(t) \cos t, \rho(t) \sin t, 0)$ con $\rho(t)$ opportuno, e l'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k . Un punto P di massa $m = 2$ si muove nel sistema K , sul piano $\{\eta = 0\}$, lungo una circonferenza di centro O' e raggio $r = 1$ con velocità angolare costante $\omega_2 = 2$.

(1.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B .

(1.2) Scrivere la legge del moto nel sistema k .

(1.3) Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v' .

(1.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0 .

(1.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T .

(1.6) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P .

ESERCIZIO 2. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \rho + \frac{1}{\rho^2}$$

(2.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.

(2.2) Determinare i punti d'equilibrio per il sistema e discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.

(2.4) Studiare qualitativamente le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(2.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(2.6) Discutere le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = (x^5 + 3x^4 - 8x^3)e^x$$

Si scelga l'energia potenziale in modo tale che sia $V(0) = 0$.

(3.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.

(3.2) Studiare qualitativamente il grafico del potenziale.

(3.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(3.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.

(3.5) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.