

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO III - LIVIA CORSI (15-03-06)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (2, 1)$. Se ne determini la soluzione.

ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^{(3)} + \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \\ \ddot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per $x(0) = (1, 1, 1)$, $x(0) = (-2, 0, 2)$ e $x(0) = (5, -3, 2)$. Cosa si può dire riguardo alle ultime due soluzioni?

(Sugg: Confrontare la geometria delle soluzioni con quella degli autospazi.)

ESERCIZIO 4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} e^t \ddot{x} + (1 - e^t) \dot{x}^2 = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

(Sugg: Considerare la sostituzione $y = \dot{x}$)

ESERCIZIO 5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{xt \cos t - x}{t} \\ x(\pi) = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 6. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 6\dot{x} + 10x = \cos t \\ x(0) = -1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 7. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{e^t + 2(2t - 1)x}{2t} \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

(Sugg: Considerare la sostituzione $y = 2tx$)