

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006  
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO IV - LIVIA CORSI (22-03-06)

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x^2 - 1)(y - e^{-x^2}) \\ \dot{y} = 8xye^{-x^2} - 4x^3ye^{-x^2} - 2xy^2 \end{cases}$$

(1.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = (x^2y - y)(y - 2e^{-x^2})$$

è una costante del moto per il sistema.

(1.2) Determinare i punti d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

(1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(1.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x^4 + x^2 \\ \dot{y} = 4x^3y - y^2 - 2xy \end{cases}$$

(2.1) Determinare una costante del moto per il sistema.

(2.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(2.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

(2.5) Scrivere esplicitamente la soluzione  $(x(t), y(t))$  con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 0)$

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x^2y + 4y^3 - 10y \\ \dot{y} = 16x - 16x^3 - 10xy^2 \end{cases}$$

(3.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(4x^2 + y^2 - 4)$$

è una costante del moto per il sistema.

(3.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(3.3) Studiare la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(3.4) Analizzare qualitativamente le altre curve di livello.

(3.5) Cosa si può dire sulla periodicità delle traiettorie corrispondenti alle curve di livello  $\Gamma_E$  con  $E \neq 0$ ?