

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO V - LIVIA CORSI (27-03-06)

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = (x^2 - 1)(5x^2 - 1) - y^2 \end{cases}$$

(1.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = x(y - x^2 + 1)(y + x^2 - 1)$$

è una costante del moto per il sistema.

(1.2) Determinare i punti d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

(1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(1.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

(1.5) Scrivere esplicitamente la soluzione con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x^2 - 3y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

(2.1) Determinare una costante del moto per il sistema.

(2.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(2.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

(2.5) Scrivere esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 0)$.

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 2y \\ \dot{y} = 2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

(3.1) Determinare una costante del moto per il sistema.

(3.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(3.3) Studiare la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : H(\theta, y) = 0\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(3.4) Analizzare qualitativamente le altre curve di livello.

(3.5) Determinare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.