

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VI - LIVIA CORSI (29-03-06)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V, \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove

$$V(x, y) = y^2 - x^4 + 2x^2 - 1$$

(1.1) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità; verificare in particolare che esiste un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

(1.2) Analizzare le curve di livello nel piano delle fasi.

(1.3) Stimare il bacino d'attrazione del punto asintoticamente stabile

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1)(2x^2y^2 - x^2 - 1) \\ \dot{y} = 2x(1 - y^2)(2x^2y^2 - y^2 - 1) \end{cases}$$

(2.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2y^2 - 1)$$

è una costante del moto per il sistema.

(2.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(2.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 3. Sia $H(x, y)$ una costante del moto (di classe almeno C^1) di un sistema dinamico planare. Dimostrare che se esiste un ciclo limite $\gamma = L_\omega(x)$ allora necessariamente esiste un intorno $B(x)$ tale che H è identicamente costante su $B(x)$.

ESERCIZIO 4. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y^2 \\ \dot{y} = -y - x^2 \end{cases}$$

(4.1) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la natura.

(4.2) Stimare il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabili.