

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VII - LIVIA CORSI (19-04-06)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^5 - x^3)e^{-x^2}$$

- (1.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- (1.2) Verificare che l'energia $E(x, y) = y^2/2 + V(x)$, con $y = \dot{x}$, è una costante del moto.
- (1.3) Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
- (1.4) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (1.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano (x, \dot{x}) .
- (1.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^4 - \frac{1}{x}$$

- (2.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- (2.2) Verificare che l'energia $E(x, y) = y^2/2 + V(x)$, con $y = \dot{x}$, è una costante del moto.
- (2.3) Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
- (2.4) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano (x, \dot{x}) .
- (2.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -x^4 + 5x^2 - \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Al variare di α si discutano i seguenti punti.

- (3.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- (3.2) Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
- (3.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano (x, \dot{x}) .
- (3.5) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (3.6) Verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica per $\alpha = 4$ con energia meccanica $E = 0$.
- (3.7) Scriverne il periodo T come integrale definito e darne una stima.