# Capitolo 13. Simmetrie e costanti del moto

## sec.57 57. Teorema di Noether

p.57.1 **57.1. Introduzione.** Si è visto nel paragrafo §54 che l'esistenza di una variabile ciclica permette di ricondurre lo studio di un sistema lagrangiano allo studio di un sistema ridotto, *i.e.* di un sistema che ha un grado di libertà in meno.

È quindi di grande importanza sapere sotto quali condizioni è possibile trovare un sistema di coordinate in cui una di esse sia ciclica. Si mostrerà che la riduzione a un sistema con un numero di gradi di libertà inferiore è possibile quando il sistema ammette un gruppo di simmetrie, *i.e.* un gruppo di trasformazioni (differenziabili invertibili) a un parametro che lasciano invariante la lagrangiana (tali nozioni verranno definite rigorosamente nel corso della trattazione).

Individuare le simmetrie che caratterizzano il sistema fornisce anche indicazioni sul sistema di coordinate che bisogna usare perché una di esse sia ciclica (cfr. l'osservazione 57.25 più avanti).

p.57.2 **57.2.** DEFINIZIONE (GRUPPO A UN PARAMETRO DI DIFFEOMORFISMI). *Chiamiamo* gruppo a un parametro di diffeomorfismi *definiti sullo spazio delle configurazioni l'insieme di trasformazioni differenziabili invertibili dello spazio delle configurazioni in sé che dipendano in maniera differenziabile da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Indicheremo con $\mathcal{G}$ tale gruppo, e con $g(\alpha)$ i suoi elementi; la legge di composizione sarà $g(\beta) \circ g(\alpha) = g(\alpha + \beta)$.*

p.57.3 **57.3.** Consideriamo un sistema lagrangiano. Assumiamo per semplicità che lo spazio delle configurazioni sia identificabile (almeno localmente) con $\mathbb{R}^N$ mediante un'opportuna scelta di coordinate: in tal caso ogni elemento $g(\alpha) \in \mathcal{G}$ risulta essere una trasformazione di coordinate, differenziabile e invertibile (con inversa differenziabile), che indicheremo con

57.1
$$q \to Q(q, \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{57.1}$$

da $\mathbb{R}^N$ in sé. In tal caso diremo che $\mathcal{G}$ è un *gruppo a un parametro di trasformazioni (differenziabili)*. Nel seguito si lavorerà sempre in $\mathbb{R}^N$: questo non sarà restrittivo perché l'analisi che verrà fatta sarà locale.

p.57.4 **57.4.** LEMMA. *Il gruppo di trasformazioni $\mathcal{G}$ dato dalle (57.1), con* $[\mathrm{d}Q/\mathrm{d}\alpha](q, \alpha)$

*differenziabile in $q$, è associato in modo biunivoco a un campo vettoriale autonomo $\xi$ di classe $C^1$ in $\mathbb{R}^N$.*

p.57.5 **57.5.** *Dimostrazione del lemma 57.4.* Sia $\mathcal{G}$ un gruppo a un parametro di trasformazioni. Per le proprietà di gruppo risulta

57.2
$$Q(q,\alpha+\beta) = Q(Q(q,\alpha),\beta), \tag{57.2}$$

e quindi la derivata

57.3
$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Q(Q(q,\alpha),\varepsilon) - Q(q,\alpha)}{\varepsilon} \tag{57.3}$$

dipende da $q$ solo attraverso la funzione $Q$. Quindi la (57.2) descrive il flusso di un sistema dinamico autonomo

57.4
$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha} = f(Q), \qquad Q(q,0) = q, \tag{57.4}$$

dove $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è un campo vettoriale di classe $C^1$ sotto le ipotesi di regolarità su $[\mathrm{d}Q/\mathrm{d}\alpha](q,\alpha)$.

La definizione di $f$ non dipende dalle coordinate scelte. Se infatti, in luogo delle coordinate $q$, si fossero scelte altre coordinate $q'$ e $\alpha \to Q'(q',\alpha)$ fosse stata la legge di trasformazione delle coordinate sotto il diffeomorfismo $g(\alpha)$, il campo vettoriale corrispondente sarebbe stato tale che

57.5
$$\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}\alpha} = f'(Q'), \qquad Q'(q',0) = q', \tag{57.5}$$

con $f'(Q') = J(Q',Q)\, f(Q)$, dove $J(Q',Q)$ è la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate $Q \to Q'(Q)$, *i.e.*

57.6
$$f'_k(Q') = \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial Q'_k(Q)}{\partial Q_h}\, f_h(Q) = \left\langle \frac{\partial Q'_k(Q)}{\partial Q}, f(Q) \right\rangle, \tag{57.6}$$

se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. Possiamo quindi indicare il campo vettoriale con $\xi$ e dire che $f(q)$ è la forma che esso assume nel sistema di coordinate $q$.

Viceversa, sia $\xi$ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^N$, rappresentato dalle funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^N$ nelle coordinate $q$, e sia $Q(q,\alpha)$ la soluzione delle equazioni (57.4). Se $f$ è di classe $C^1$, tale soluzione esiste ed è unica per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e ogni $q \in \mathbb{R}^N$. Poiché inoltre il campo vettoriale dipende da $Q$ ma non esplicitamente da $\alpha$, il sistema dinamico (57.4) è autonomo e quindi vale la proprietà di composizione (57.2). Quindi le trasformazioni $g(\alpha)$ formano gruppo, con legge di composizione $g(\beta) \circ g(\alpha) = g(\alpha+\beta)$. ■

p.57.6 **57.6.** *Osservazione.* Se consideriamo un sistema definito su una varietà differenziabile $\Sigma$, il campo vettoriale in un punto $x \in \Sigma$ sarà definito sullo spazio tangente in $x$ a $\Sigma$, *i.e.* $T_x\Sigma$.

p.57.7 **57.7.** Definizione (Sollevamento di una trasformazione di coordinate). *Data una trasformazione di coordinate (57.1) su una varietà, possiamo considerare la* *trasformazione definita sul fibrato tangente come*

57.7
$$q \to Q(q,\alpha), \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau} \to \frac{\mathrm{d}Q(q,\alpha)}{\mathrm{d}\tau} \equiv J(Q(q,\alpha),q)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}, \tag{57.7}$$

*se $\tau \to q(\tau)$ è la parametrizzazione di una curva su $\Sigma$ e $J(Q(q,\alpha),q)$ è la matrice jacobiana della trasformazione $q \to Q(q,\alpha)$. Chiameremo* sollevamento *della trasformazione (57.1) la trasformazione (57.7). La seconda trasformazione in (57.7) è la legge di trasformazione dei vettori tangenti alla varietà, e per $\tau = t$ rappresenta la legge di trasformazione delle velocità.*

p.57.8 **57.8.** Un campo vettoriale $\xi$ su una varietà $\Sigma$ è identificabile con una derivazione $\partial_\xi$ definita sullo spazio delle funzioni differenziabili su $\Sigma$. Se $U$ è un intorno di un punto $x \in \Sigma$ in cui sia definito il sistema di coordinate $q$, allora il campo vettoriale è individuato da $N$ funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^N$, tale che $f(q) = (f_1(q), \ldots, f_N(q))$ è la rappresentazione di $\xi$ nel sistema di coordinate fissato.

L'operazione di derivazione associata è allora data da

57.8
$$\partial_\xi A(q) = \sum_{k=1}^N f_k(q)\,\frac{\partial A}{\partial q_k}, \tag{57.8}$$

per ogni funzione differenziabile $A$: $\Sigma \to \mathbb{R}$.

La (57.4) implica allora, per la (57.8), che

57.9
$$\partial_\xi A(q) = \left.\frac{\mathrm{d}A(Q(q,\alpha))}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}, \tag{57.9}$$

dove, quindi, $q \to Q(q,\alpha)$ è il gruppo a un parametro di trasformazioni associato al campo vettoriale $\xi$. Se $\xi$ è individuato dalle funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^N$, con $f_k(q) = \delta_{ik}$, scriveremo $\partial_\xi = \delta_{q_i}$ e identificheremo il campo vettoriale con la derivazione $\delta_{q_i}$.

p.57.9 **57.9.** LEMMA. *Dato un campo vettoriale $\xi$ su una varietà $\Sigma$ e una funzione $A$ differenziabile definita su $\Sigma$, il differenziale $dA(\xi)$ è dato da*

57.10
$$dA(\xi) = \partial_\xi A, \tag{57.10}$$

*se $\partial_\xi$ è la derivazione definita da (57.8).*

p.57.10 **57.10.** *Dimostrazione del lemma 57.9.* Per definizione di differenziale, nel sistema di coordinate $q$, si ha

57.11
$$dA = \sum_{k=1}^N \frac{\partial A}{\partial q_k} dq_k, \tag{57.11}$$

e, tenendo conto che $dq_k(\xi) = f_k(q)$, la (57.10) segue allora dalla (57.8). ■

p.57.11 **57.11.** *Osservazione.* Data una varietà $\Sigma$, sia $T_x\Sigma$ lo spazio tangente in $x$ a $\Sigma$. Se $q$ è un sistema di coordinate locali per $\Sigma$ (in un intorno di $x$ in $\Sigma$) e $\eta$ è un sistema di coordinate per $T_x\Sigma$, possiamo allora utilizzare $(x, \eta)$ come sistema di coordinate locali per il fibrato tangente $T\Sigma$.

p.57.12 **57.12.** Definizione (Momento associato a un campo vettoriale da una lagrangiana). *Sia una varietà $\Sigma$ e $\mathcal{L}$ una lagrangiana definita su $T\Sigma$. In un sistema di coordinate locali $(q, \eta)$ per $T\Sigma$, definiremo* momento associato al campo vettoriale $\xi$ dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ *la funzione*

57.12
$$\pi_\xi^{\mathcal{L}}(q, \eta) \equiv \sum_{k=1}^{N} f_k(q)\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k}\,(q, \eta), \tag{57.12}$$

*da $T\Sigma$ in $\mathbb{R}$. Diremo che il momento (57.12) è un* momento conservato *se è una costante del moto.*

p.57.13 **57.13.** Lemma. *Data una varietà $\Sigma$, fissata una lagrangiana $\mathcal{L}$ di classe $C^2$ su $T\Sigma$ tale che*

57.13
$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\right) \neq 0, \tag{57.13}$$

*a ogni campo vettoriale $\xi$ su $\Sigma$ è associato in modo biunivoco un momento $\pi$.*

p.57.14 **57.14.** *Dimostrazione del lemma 57.13.* Dato un campo vettoriale $\xi$, il suo momento associato $\pi = \pi_\xi^{\mathcal{L}}$ si ottiene dalla (57.12).

Viceversa, dato un momento $\pi = \pi^{\mathcal{L}}$ della forma

57.13a
$$\pi^{\mathcal{L}}(q, \eta) \equiv \sum_{k=1}^{N} f_k(q)\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k}\,(q, \eta), \tag{57.14}$$

la condizione (57.13) permette di associare a esso in maniera univoca un campo vettoriale $\xi$. Infatti se la (57.13) è soddisfatta allora $\pi^{\mathcal{L}}$ dipende esplicitamente da $\eta$ e la relazione

57.14
$$\frac{\partial \pi^{\mathcal{L}}}{\partial \eta_h}(q, \eta) = \sum_{k=1}^{N} f_k(q)\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta_k \partial \eta_h}(q, \eta) \equiv \sum_{k=1}^{N} D_{hk}(q, h)\, f_k(q) \tag{57.15}$$

può essere invertita in

57.15
$$f_k(q) = \sum_{h=1}^{N} \left(D^{-1}(q, \eta)\right)_{kh} \frac{\partial \pi^{\mathcal{L}}}{\partial \eta_h}(q, \eta), \tag{57.16}$$

che dunque permette di determinare le componenti $\{f_k(q)\}_{k=1}^{N}$ del campo vettoriale $\xi = \xi_\pi^{\mathcal{L}}$. ■

p.57.15 **57.15.** Per ogni $x \in \Sigma$, la (57.12) definisce un funzionale lineare sullo spazio tangente $T_x\Sigma$, dunque un elemento di $T_x^*\Sigma$, spazio duale dello spazio tangente.

Il momento (57.12) non dipende dal sistema di coordinate. Sia infatti $(q', \eta')$ un differente sistema di coordinate locali per $\Sigma$. Se $\{f'_k(q')\}_{k=1}^N$ rappresenta il campo vettoriale nelle coordinate $q'$, risulta allora in tale sistema

57.16
$$\sum_{k=1}^{N} f'_k(q') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'_k}(q', \eta') = \sum_{k,h,j=1}^{N} f_h(q) \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta'_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j}(q, \eta), \tag{57.17}$$

per la (57.6), e, poiché le coordinate $\eta$ si trasformano come le $\dot{q}$, si ha

57.16*a*
$$\eta'_k = \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \eta_h, \tag{57.18}$$

essendo stata utilizzata la seconda delle (57.7) con $\tau = t$, e quindi

57.17
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta'_k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} = \delta_{hj}. \tag{57.19}$$

La (57.19), introdotta nella (57.17), dà

57.18
$$\sum_{k=1}^{N} f'_k(q') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'_k} = \sum_{k=1}^{N} f_k(q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k}, \tag{57.20}$$

da cui segue l'indipendenza di $\pi_\xi^{\mathcal{L}}$ dal sistema di coordinate.

*p*.57.16 **57.16.** Esempio. Sia $\mathcal{L}$ la lagrangiana di un sistema meccanico conservativo. Se $\xi$ è il campo vettoriale associato alle traslazioni rigide in una direzione prefissata nello spazio euclideo tridimensionale, il momento associato a $\xi$ da $\mathcal{L}$ è la componente della quantità di moto del sistema in quella direzione (cfr. l'esercizio 1).

*p*.57.17 **57.17.** Esempio. Sia $\mathcal{L}$ la lagrangiana di un sistema meccanico conservativo. Se $\xi$ è il campo vettoriale associato alle rotazioni rigide intorno a un asse prefissato nello spazio euclideo tridimensionale, il momento associato a $\xi$ da $\mathcal{L}$ è la componente del momento angolare del sistema nella direzione dell'asse (cfr. l'esercizio 2).

*p*.57.18 **57.18.** Definizione (Momento coniugato). *Dato un sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}$, chiameremo* momento coniugato *alla coordinata $q_k$ il momento associato da $\mathcal{L}$ al campo vettoriale $\partial_{q_k}$, i.e.*

57.19
$$\pi_{\partial_{q_k}}^{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \tag{57.21}$$

*e scriveremo $p_k = \pi_{\partial_{q_k}}^{\mathcal{L}}$.*

*p*.57.19 **57.19.** Lemma. *Dato un sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}$, se vale la (57.13), per ogni momento si può scegliere un sistema di coordinate tale che esso possa essere scritto nella forma*

57.20
$$p_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_N}, \tag{57.22}$$

*i.e. ogni momento associato a un campo vettoriale $\xi$ dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ può essere scritto come momento coniugato di una variabile, pur di scegliere un opportuno sistema di coordinate.*

p.57.20 **57.20.** *Dimostrazione del lemma 57.19.* Dato un campo vettoriale $\xi$, rappresentato dalle funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^N$ nel sistema di coordinate $q$, per il teorema 19.2 della scatola di flusso, possiamo costruire un sistema di coordinate $y$ in cui il campo vettoriale prende la forma $\{\delta_{kN}\}_{k=1}^N$. L'asserto segue dunque dalla definizione 57.12 e dalla definizione 57.18. ■

p.57.21 **57.21.** DEFINIZIONE (INVARIANZA DELLA LAGRANGIANA). *Dato un sistema lagrangiano e dato un gruppo a un parametro di trasformazioni di coordinate (57.1), diremo che $\mathcal{L}$ è* invariante *sotto l'azione del gruppo, ovvero che il gruppo lascia invariante la lagrangiana $\mathcal{L}$, se*

57.21
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(Q(q, \alpha), \dot{Q}(q, \alpha), t) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \tag{57.23}$$

*dove $\dot{Q}(q, \alpha)$ è data dalla (57.7) con $\tau = t$.*

p.57.22 **57.22.** DEFINIZIONE (GRUPPO DI SIMMETRIE). *Sia $\mathcal{G}$ un gruppo a un parametro di diffeomorfismi. Se $\mathcal{L}$ è lasciata invariante da $\mathcal{G}$, diremo che $\mathcal{G}$ è un gruppo di simmetrie per $\mathcal{L}$.*

p.57.23 **57.23.** TEOREMA (NOETHER). *Dato un sistema lagrangiano di classe $C^2$, le tre seguenti affermazioni sono equivalenti.*
*(1) È possibile scegliere un sistema di coordinate in modo tale che una di esse sia ciclica.*
*(2) Esiste un momento conservato associato a un campo vettoriale differenziabile.*
*(3) La lagrangiana è invariante per il (sollevamento di un) gruppo a un parametro di trasformazioni differenziabili di coordinate, che dipendono in modo differenziabile dal parametro.*
*Inoltre, se una delle precedenti affermazioni è vera, il campo vettoriale associato al momento conservato è lo stesso campo vettoriale associato al gruppo di trasformazioni.*

p.57.24 **57.24.** *Dimostrazione del teorema 57.23.* Dimostreremo le implicazioni (1) → (2) → (3) → (1).

Supponiamo valga l'affermazione (1). Sia $q$ il sistema di coordinate in cui una di esse sia ciclica; possiamo supporre, eventualmente rinumerando le variabili, che sia ciclica $q_N$. Quindi, per le equazioni di Eulero-Lagrange

57.22
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\dot{q}_N} = 0, \tag{57.24}$$

e quindi è conservato il momento coniugato alla variabile $q_N$, *i.e.* il momento $p_N = \pi^{\mathcal{L}}_{\partial_{q_N}}$ (cfr. la definizione 57.18).

Supponiamo che valga l'affermazione (2). Siano $\pi^{\mathcal{L}}$ il momento conservato, $\xi^{\mathcal{L}}_{\pi}$ il campo vettoriale associatogli dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ e $\{f_k(q)\}_{k=1}^{N}$ la rappresentazione di tale campo vettoriale nelle coordinate $q$. Consideriamo il sistema di equazioni

57.23
$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\alpha} = f_k(Q), \qquad k = 1, \dots, N, \tag{57.25}$$

e sia $Q(q, \alpha)$ la soluzione con dato iniziale $Q(q, 0) = q$. Poiché il campo vettoriale è differenziabile, tale soluzione è unica (per il teorema 10.36).

Sia $t \to q(t)$ una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (per opportuni dati iniziali). Poiché $\pi^{\mathcal{L}}$ è un momento conservato, si deve avere

57.24
$$\frac{\mathrm{d}\pi^{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{N} f_k(q(t))\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\right) = 0, \tag{57.26}$$

e quindi, utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange, la regolarità di $\mathcal{L}$, il fatto che $Q(q(t), 0) = q(t)$ e il fatto che $\alpha$ e $t$ sono parametri indipendenti, otteniamo

57.25
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{N} f_k(q(t))\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{N} f_k(Q(q(t), \alpha))\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k}\big(Q(q(t), \alpha), \dot{Q}(q(t), \alpha), t\big)\right)\Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle f, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\Bigg|_{\alpha=0} = \left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\Bigg|_{\alpha=0} + \left\langle f, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q}, \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha}\right\rangle\Bigg|_{\alpha=0} + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)\right\rangle\Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha}\big(Q(q(t), \alpha), \dot{Q}(q(t), \alpha), t\big)\Bigg|_{\alpha=0},
\end{aligned} \tag{57.27}$$

*i.e.* $\mathcal{L}$ è invariante sotto l'azione del gruppo a un parametro $q \to Q(q, \alpha)$.

Supponiamo valga l'affermazione (3). Siano $\{f_k(q)\}_{k=1}^{N}$ le funzioni che rappresentano il campo vettoriale associato al gruppo a un parametro di trasformazioni, nel sistema di coordinate $q$; per costruzione le trasformazioni $q \to Q(q, \alpha)$ sono soluzioni del sistema di equazioni

57.26
$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\alpha} = f_k(Q), \qquad Q(q, 0) = q. \tag{57.28}$$

Per il teorema 19.2 della scatola di flusso, possiamo scegliere un sistema di coordinate tali che il sistema (57.28) prenda la forma

57.27
$$\frac{\partial y_k}{\partial \alpha} = 0, \qquad k = 1, \dots, N-1, \qquad \frac{\partial y_N}{\partial \alpha} = 1, \tag{57.29}$$

le cui soluzioni sono

57.28 $$y_k(\alpha) = y_k(0), \qquad k = 1, \dots, N-1, \qquad y_N(\alpha) = y_N(0) + \alpha, \tag{57.30}$$

Poiché per ipotesi $\mathrm{d}\mathcal{L}/\mathrm{d}\alpha = 0$, segue dalla (57.30) che deve essere $\partial\mathcal{L}/\partial y_N = 0$, e quindi, nel sistema di coordinate $y$, $y_N$ è una variabile ciclica. ■

*p.57.25* **57.25.** *Osservazione.* Dal lemma 57.19 segue che se esiste un momento conservato, nel sistema di coordinate in cui tale momento è il momento coniugato alla coordinata $q_N$, tale coordinata è una variabile ciclica. Quindi la lagrangiana è invariante per il gruppo di trasformazioni

57.29 $$q_k \to q_k, \qquad k = 1, \dots, N-1, \qquad q_N \to q_N + \alpha, \tag{57.31}$$

che dunque ridimostra l'implicazione (2) → (3) del teorema 57.23.

*p.57.26* **57.26.** *Osservazione.* Non tutte le costanti del moto di un sistema lagrangiano sono funzioni dei momenti conservati, *i.e.* esistono costanti del moto non riconducibili a simmetrie delle lagrangiana. Per esempio, se $\mathcal{L}$ descrive un sistema meccanico conservativo autonomo, è costante l'energia totale $E = T + U$ del sistema, che non è tuttavia una funzione dei momenti se $U \neq 0$.

La conservazione dell'energia è in realtà una conseguenza dell'invarianza della lagrangiana sotto l'azione della trasformazione $t \to t + \alpha$, che non è però una trasformazione definita sullo spazio delle configurazioni. Per poter considerare la conservazione dell'energia come un caso particolare del teorema 57.23, occorre considerare uno spazio delle configurazioni esteso, dato da $\Sigma \times \mathbb{R}$, se $\Sigma$ è lo spazio delle configurazioni e $\mathbb{R}$ è l'asse dei tempi.

## *sec.58* 58. Gruppi di simmetrie che dipendono da più parametri

*p.58.1* **58.1. Introduzione.** Nel paragrafo §57 si si sono discusse le implicazioni dell'esistenza di un gruppo di simmetrie per un sistema lagrangiano. Ci si può chiedere se, nel caso in cui il sistema ammetta un gruppo di simmetrie che contenga $M$ sottogruppi a un parametro, sia possibile ridursi a un sistema lagrangiano che abbia $N - M$ gradi di libertà.

In generale la risposta è negativa. Vedremo che perché la riduzione sia possibile occorre che i gruppi siano commutativi. Questo vuol dire che, se $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_M$ sono i gruppi a un parametro, deve succedere che

58.1 $$g_i(\alpha) \circ g_j(\beta) = g_j(\beta) \circ g_i(\alpha) \qquad \forall g_i \in \mathcal{G}_i, \quad \forall g_j \in \mathcal{G}_j, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{58.1}$$

Se la proprietà (58.1) non è soddisfatta, quello che si può dire in generale è che esistono $M$ costanti del moto tra loro funzionalmente indipendenti tali che il moto si svolge su una superficie di codimensione $M$ e se il sistema è autonomo (così che si conserva anche l'energia) su una superficie di codimensione $M+1$. In tale caso tuttavia il sistema ridotto non è in generale un sistema lagrangiano (*i.e.* le equazioni del moto non sono le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti a una qualche lagrangiana) con un numero di gradi di libertà inferiore. Infatti per passare da un sistema lagrangiano dato a un sistema lagrangiano con un grado in libertà in meno, applicando il teorema 54.7, bisogna utilizzare il fatto che una variabile è ciclica. Se le (58.1) non sono soddisfatte, è allora senz'altro possibile fissare un sistema di coordinate in cui una di esse sia ciclica (per il teorema 57.23), ma, a questo punto, nel sistema di coordinate fissato, non ci potranno essere altre variabili cicliche se le trasformazioni corrispondenti ai gruppi a un parametro non verificano la (58.1) e quindi non è possibile riapplicare il teorema 54.7 una seconda volta.

p.58.2 **58.2.** LEMMA. *Data una varietà regolare $\Sigma$ e dati due campi vettoriali $\xi, \zeta$ definiti su $\Sigma$, se $\partial_\xi$ e $\partial_\zeta$ indicano le derivazioni associate, rispettivamente, ai due campi vettoriali, allora l'operazione*

58.2
$$\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi, \tag{58.2}$$

*è una derivazione definita sulle funzioni due volte differenziabili.*

p.58.3 **58.3.** *Dimostrazione del lemma 58.2.* Poiché la (58.2) è ovviamente lineare, è sufficiente dimostrare che soddisfa la regola di Leibniz.

Siano $A$ e $B$ due funzioni due volte differenziabili su $\Sigma$. Si ha allora

58.3
$$\begin{aligned} \partial_\xi \partial_\zeta (AB) &= \partial_\xi (B \partial_\zeta A + A \partial_\zeta B) \\ &= (\partial_\xi B)(\partial_\zeta A) + B(\partial_\xi \partial_\zeta A) + (\partial_\xi A)(\partial_\zeta B) + A(\partial_\xi \partial_\zeta B), \end{aligned} \tag{58.3}$$

e analogamente si calcola $\partial_\zeta \partial_\xi (AB)$. Sottraendo l'una dall'altra le due espressioni trovate si vede che i termini $(\partial_\xi B)(\partial_\zeta A)$ e $(\partial_\xi A)(\partial_\zeta B)$ si cancellano e si trova quindi

58.4
$$(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)(AB) = A(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi) B + B(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi) A, \tag{58.4}$$

che conclude la dimostrazione. ■

p.58.4 **58.4.** DEFINIZIONE (PRODOTTO DI LIE). *Sia $\Sigma$ una varietà regolare e siano $\xi, \zeta$ due campi vettoriali definiti su $\Sigma$. Siano $\partial_\xi$, $\partial_\zeta$ le due derivazioni associate, rispettivamente, a $\xi$, $\zeta$. Si definisce* prodotto di Lie *dei due campi vettoriali $\xi$ e $\zeta$ il campo vettoriale associato alla derivazione (58.2). Scriveremo*

58.5
$$\partial_{[\xi,\zeta]} = \partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi, \tag{58.5}$$

*i.e. il prodotto di Lie dei due campi $\xi, \zeta$ sarà indicato con il simbolo* $[\xi, \zeta]$.

p.58.5 **58.5.** LEMMA. *Il prodotto di Lie gode delle seguenti proprietà:*
*(1) antisimmetricità:* $[\xi_1, \xi_2] = -[\xi_2, \xi_1]$*;*

*(2) linearità:* $[(\xi_1+\xi_2),\xi_3] = [\xi_1,\xi_3] + [\xi_2,\xi_3]$;
*(3) identità di Jacobi:* $[\xi_1,[\xi_2,\xi_3]] + [\xi_2,[\xi_3,\xi_1]] + [\xi_3,[\xi_1,\xi_2]] = 0$.

p.58.6 **58.6.** *Dimostrazione del lemma 58.5.* Segue immediatamente dalla (58.5) nella definizione 58.4 (cfr. anche gli esercizi 3, 4 e 5). ∎

p.58.7 **58.7.** Lemma. *Fissato un sistema di coordinate locali su una varietà regolare $\Sigma$ tale che i due campi $\xi$ e $\zeta$ definiti su $\Sigma$ siano rappresentati dalle funzioni, rispettivamente, $\{f_k(q)\}_{k=1}^N$ e $\{g_k(q)\}_{k=1}^N$, allora le funzioni*

58.6
$$\left\{ \sum_{h=1}^{N} \left( f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right) \right\}_{k=1}^{N} \tag{58.6}$$

*rappresenteranno il campo vettoriale $[\xi,\zeta]$.*

p.58.8 **58.8.** *Dimostrazione del lemma 58.7.* Sia $A$ una funzione due volte differenziabile; si ha allora

58.7
$$\partial_\xi \partial_\zeta A = \sum_{k=1}^{N} f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} (\partial_\zeta A) = \sum_{k=1}^{N} f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{h=1}^{N} g_h(q) \frac{\partial A}{\partial q_h} \right), \tag{58.7}$$

e, analogamente,

58.8
$$\partial_\zeta \partial_\xi A = \sum_{k=1}^{N} g_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} (\partial_\xi A) = \sum_{k=1}^{N} g_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{h=1}^{N} f_h(q) \frac{\partial A}{\partial q_h} \right), \tag{58.8}$$

da cui, utilizzando la definizione 58.4 di $[\xi,\zeta]$, segue la (58.6). ∎

p.58.9 **58.9.** *Osservazione.* Sebbene il campo vettoriale $[\xi,\zeta]$ sia stato definito utilizzando funzioni di classe $C^2$, di fatto risulta definito come derivazione su funzioni di classe $C^1$ ,*i.e.*

58.9
$$\partial_{[\xi,\zeta]} A = \sum_{k=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} \left( f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right) \frac{\partial A}{\partial q_k}. \tag{58.9}$$

p.58.10 **58.10.** Definizione (Commutazione di campi vettoriali). *Dati due campi vettoriali $\xi,\zeta$ definiti su una varietà regolare $\Sigma$, diremo che essi* commutano *se il loro prodotto di Lie è nullo, i.e. se $[\xi,\zeta]=0$.*

p.58.11 **58.11.** Teorema. *Data un varietà regolare $\Sigma$ di dimensione $N$ e dati $M$ campi vettoriali $\xi_1,\ldots,\xi_M$, con $M \le N$, definiti su $\Sigma$, la condizione*

58.10
$$[\xi_i,\xi_j] = 0, \qquad \forall i,j = 1,\ldots,M, \tag{58.10}$$

*è soddisfatta se e solo se i gruppi a un parametro di diffeomorfismi associati soddisfano le relazioni*

58.11
$$g_i(\alpha_i) \circ g_j(\alpha_j) = g_j(\alpha_j) \circ g_i(\alpha_i), \qquad \forall \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{R}, \tag{58.11}$$

*per ogni* $i, j = 1, \ldots, M$.

p.58.12 **58.12.** *Dimostrazione del teorema 58.11.* Sia $A$ una funzione due volte differenziabile su $\Sigma$. Se vale la (58.11) allora (cfr. l'esercizio 6)

58.12
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_i} \left( \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha_j} \right) \Bigg|_{\alpha_i=\alpha_j=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_j} \left( \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha_i} \right) \Bigg|_{\alpha_i=\alpha_j=0}, \tag{58.12}$$

così che la (57.9) e la (58.5) implicano $\partial_{[\xi_i,\xi_j]} A = 0$ e quindi, per l'arbitrarietà di $A$, si ha $[\xi_i, \xi_j] = 0$.

Viceversa, supponiamo che valgano le relazioni (58.10). Vogliamo allora dimostrare che seguono le (58.11). Siano $q \to Q_i(q, \alpha_i)$ le trasformazioni di coordinate che rappresentano localmente i diffeomorfismi $g_i(\alpha_i)$ e $\{f_{ik}(q)\}_{k=1}^N$ le funzioni che rappresentano localmente i campi vettoriali $\xi_i$ associati a tali diffeomorfismi. Le (58.10) implicano allora, per il lemma 58.7,

58.13
$$\sum_{h=1}^N \left( f_{ih} \frac{\partial f_{jk}}{\partial q_h} - f_{jh} \frac{\partial f_{ik}}{\partial q_h} \right) = 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, M, \qquad \forall k = 1, \ldots, N, \tag{58.13}$$

che possiamo riscrivere, in modo più compatto,

58.14
$$\left\langle f_i, \frac{\partial f_j}{\partial q} \right\rangle - \left\langle f_j, \frac{\partial f_i}{\partial q} \right\rangle = 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, M. \tag{58.14}$$

Si ha allora, per $\alpha_i, \alpha_j \to 0$ (cfr. l'esercizio 7),

58.15
$$\begin{aligned} Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = q + f_i(q)\, \alpha_i + f_j(q)\, \alpha_j + \left\langle f_j(q), \frac{\partial f_i}{\partial q}(q) \right\rangle \alpha_i \alpha_j \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i}(q)\, \alpha_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial f_j}{\partial \alpha_j}(q)\, \alpha_j^2 + N_i(\alpha_i^2 + \alpha_j^2), \end{aligned} \tag{58.15}$$

dove $N_i(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)$ è tale che

58.16
$$\lim_{\alpha_i, \alpha_j \to 0} \frac{N_i(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2} = 0, \tag{58.16}$$

così che risulta

58.17
$$\begin{aligned} & Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) - Q_j(Q_i(q, \alpha_i), \alpha_j) \\ & \qquad = \left\langle f_j(q), \frac{\partial f_i}{\partial q}(q) \right\rangle \alpha_i \alpha_j - \left\langle f_i(q), \frac{\partial f_j}{\partial q}(q) \right\rangle \alpha_i \alpha_j \\ & \qquad + N_i(\alpha_i^2 + \alpha_j^2) + N_j(\alpha_i^2 + \alpha_j^2) \\ & \qquad = N_i(\alpha_i^2 + \alpha_j^2) + N_j(\alpha_i^2 + \alpha_j^2) \equiv N_{ij}(\alpha_i^2 + \alpha_j^2), \end{aligned} \tag{58.17}$$

in virtù della (58.14). Vogliamo far vedere che la (58.17) implica

58.18
$$Q_i(Q_j(q,\alpha_j),\alpha_i) - Q_j(Q_i(q,\alpha_i),\alpha_j) = 0, \tag{58.18}$$

da cui allora segue la (58.11).

Consideriamo il rettangolo $0 \le t_i \le \alpha_i$, $0 \le t_j \le \alpha_j$. Suddividiamo entrambi gli intervalli $[0,\alpha_i]$ e $[0,\alpha_j]$ in $N$ parti uguali, ciascuna quindi di ampiezza $\Delta t_i$ e $\Delta t_j$, rispettivamente, di ordine $O(1/N)$, così che il rettangolo risulta suddiviso in $N^2$ rettangolini.

Sia $\mathcal{P}$ un cammino (contenuto nel rettangolo) che unisce i punti $(0,0)$ e $(\alpha_i,\alpha_j)$ e che consiste in un numero finito di segmenti orientati lungo le direzioni dei lati del rettangolo, sovrapposti a lati dei rettangolini (cfr. la figura 58.1). A tale cammino $\mathcal{P}$ facciamo corrispondere la composizione delle trasformazioni $q \to Q_i(q,\alpha_i)$ e $q \to Q_j(q,\alpha_j)$ ottenuta nel modo seguente: le trasformazioni saranno applicate seguendo l'ordine in cui si susseguono i segmenti a partire da $(0,0)$ e corrispondono a variazioni $\Delta t_i$ del parametro $\alpha_i$ o a variazioni $\Delta t_j$ del parametro $\alpha_j$, a seconda che il segmento sia parallelo al lato $0 \le t_i \le \alpha_i$ e abbia lunghezza $\Delta t_i$ o sia parallelo al lato $0 \le t_j \le \alpha_j$ e abbia lunghezza $\Delta t_j$.

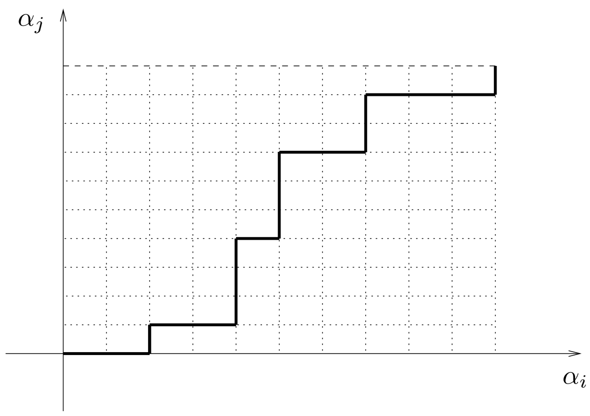


FIGURA 58.1. Figura.

A ogni cammino $\mathcal{P}$ associamo la curva sulla varietà $\Sigma$ che unisce il punto $q$ al punto che si ottiene componendo le trasformazioni nell'ordine dato dalla costruzione del cammino.

Il passaggio dal cammino $\mathcal{P}_1$ costituito dai lati $0 \le t_i \le \alpha_i$ e $0 \le t_j \le \alpha_j$ al cammino $\mathcal{P}_2$ costituito dai lati $0 \le t_j \le \alpha_j$ e $0 \le t_i \le \alpha_i$ (i due cammini corrispondono, rispettivamente, alle trasformazioni $Q_j(Q_i(q,\alpha_i),\alpha_j)$ e $Q_i(Q_j(q,\alpha_j),\alpha_i)$) si può effettuare in $N^2$ passi, in ciascuno dei quali si compie un'operazione che consiste nel sostituire una coppia di lati adiacenti di un rettangolino con l'altra.

Per le (58.16) e (58.17) la distanza dei punti finali delle curve sulla varietà che corrispondono ai cammini che si ottengono, a ogni passo, mediante l'operazione appena descritta è stimata da $N_{ij}(1/N^2)$. Effettuando $N^2$ volte tale operazione, fino a passare dal cammino $\mathcal{P}_1$ al cammino $\mathcal{P}_2$, e sfruttando la dipendenza differenziabile dai dati iniziali delle equazioni differenziali del primo ordine (cfr. il teorema 11.11), si trova che la distanza dei punti finali corrispondenti ai due cammini $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ è stimata da $N_{ij}(1/N^2)N^2$, che tende a zero per $N \to \infty$ stante la (58.16). Da qui segue allora la (58.18). ■

p.58.13 **58.13.** TEOREMA (FROBENIUS). *Data un varietà regolare $\Sigma$ di dimensione $N$ e dati $M$ campi vettoriali linearmente indipendenti $\xi_1, \ldots, \xi_M$, con $M \le N$, definiti su (un intorno $U$ di) $\Sigma$, la condizione (58.10) è condizione necessaria e sufficiente perché si possa scegliere un sistema di coordinate locali $q = (q_1, \ldots, q_N)$ tali che (sia possibile scegliere un intorno $U' \subset U$ in cui) ogni campo vettoriale $\xi_i$ sia rappresentabile come*

58.19
$$\partial_{q_i} \equiv \frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{58.19}$$

*per ogni $i = 1, \ldots, M$.*

p.58.14 **58.14.** *Dimostrazione del teorema 58.13.* Dimostriamo prima che la condizione (58.10) è necessaria. Se esiste un sistema di coordinate in cui ogni campo vettoriale $\xi_i$ sia rappresentabile nella forma (58.19) allora le funzioni che rappresentano i campi $\xi_i$ sono date da $\{\delta_{ik}\}_{k=1}^N$ e quindi le (58.6) che rappresentano il campo $[\xi_i, \xi_j]$ sono identicamente nulle, *i.e.* $[\xi_i, \xi_j] = 0$, per ogni $i, j = 1, \ldots, M$.

Dimostriamo ora che le condizioni (58.10) sono anche sufficienti perché valga la rappresentazione (58.19). Basta, a questo scopo, dimostrare che la condizione (58.11) implica che il gruppo di trasformazioni associato a ogni campo vettoriale $\xi_i$ è dato da

58.20
$$q_i \to q_i + \alpha, \qquad q_k \to q_k, \qquad \forall k \neq i; \tag{58.20}$$

infatti se la trasformazione $q \to Q(q, \alpha)$ è data dalla (58.20) allora il campo vettoriale associatole attraverso la (57.4) è appunto dato dalla (58.19).

Ricordiamo che $M$ campi vettoriali $\xi_1, \ldots, \xi_M$ sono linearmente indipendenti se la relazione $c_1\xi_1 + \ldots + c_M\xi_M = 0$ è soddisfatta se e solo se $c_m = 0$ $\forall m = 1, \ldots, M$.

Sia $x_0 \in \Sigma$ un punto in cui le funzioni $\{f_{ik}(q)\}_{k=1}^N$ che rappresentano i campi vettoriali, in un opportuno sistema di coordinate $q$, abbiano la forma

58.21
$$f_{ik}(q_0) = f_i(q_0)\delta_{ik}, \qquad k = 1, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{58.21}$$

dove $q_0$ sono le coordinate di $x_0$; l'esistenza di un sistema di coordinate in cui questo è possibile segue dall'indipendenza dei campi vettoriali (cfr. l'esercizio 8).

Sia $U \subset \Sigma$ un intorno di $x_0$ (che dovrà essere scelto così piccolo che le diseguaglianze scritte sotto in $x_0$ valgano per continuità anche in $U$) e sia $x \in U$. Possiamo allora considerare le $M$ funzioni

58.22

$$\begin{aligned} F_i(q,\alpha_1,\ldots,\alpha_M) - q_i = & \int_0^{\alpha_1} \mathrm{d}\alpha_1' \, f_{1i}\big(Q_1(q,\alpha_1')\big) \\ & + \int_0^{\alpha_2} \mathrm{d}\alpha_2' \, f_{2i}\big(Q_2(Q_1(q,\alpha_1),\alpha_2')\big) + \ldots \\ & + \int_0^{\alpha_M} \mathrm{d}\alpha_M' \, f_{Mi}\big(Q_M(Q_{M-1}(\ldots Q_1(q,\alpha_1),\ldots,\alpha_{M-1}),\alpha_M')\big), \\ & \qquad\qquad i = 1,\ldots,M, \end{aligned} \tag{58.22}$$

dove $q$ sono le coordinate di $x$; tenendo conto che
(1) $F_i(q_0,0,\ldots,0) = 0$ per $i = 1,\ldots,M$, e
(2) $[\partial F_i/\partial\alpha_j](q_0,0,\ldots,0) = f_i(q_0)\delta_{ij}$, dove $f_i(q_0) \neq 0$, per $i = 1,\ldots,M$,
così che

58.23

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} [\partial F_1/\partial\alpha_1](q_0,0,\ldots,0) & \ldots & [\partial F_1/\partial\alpha_M](q_0,0,\ldots,0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [\partial F_M/\partial\alpha_1](q_0,0,\ldots,0) & \ldots & [\partial F_M/\partial\alpha_M](q_0,0,\ldots,0) \end{pmatrix} \\ = f_1(q_0)\ldots f_M(q_0) \neq 0, \end{aligned} \tag{58.23}$$

possiamo applicare il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 15 del Capitolo 4), e concludere che esistono $M$ funzioni

58.24

$$\tilde\alpha_1(q),\ldots,\tilde\alpha_M(q), \tag{58.24}$$

tali che

58.25

$$F_i(q,\tilde\alpha_1(q),\ldots,\tilde\alpha_M(q)) = 0. \tag{58.25}$$

Si noti che le funzioni (58.22) rappresentano i valori delle prime $M$ coordinate del punto che si ottiene da $q$ applicando successivamente le $M$ trasformazioni $q \to Q_i(q,\alpha_i)$ che rappresentano i diffeomorfismi $g_i(\alpha_i)$ nelle coordinate $q$. Dal teorema 58.11 segue che i gruppi a un parametro corrispondenti ai campi vettoriali verificano le (58.11): l'ordine in cui le trasformazioni sono applicate non è importante e possiamo quindi supporre, senza perdita di generalità, che sia prima applicata la trasformazione $q \to Q_1(q,\alpha_1)$, poi la trasformazione $Q_1(q,\alpha_1) \to Q_2(Q_1(q,\alpha_1),\alpha_2)$ e così via. L'esistenza delle funzioni (58.24) che rendono valide le identità (58.25) significa che si possono fissare i valori dei parametri $\alpha_1,\ldots,\alpha_M$ in modo tale che il punto $q$ finisca in un punto che ha componenti nulle lungo le direzioni dei primi $M$ assi coordinati (cfr. la dimostrazione analoga nel caso del teorema 19.2 della scatola di flusso).

Definiamo allora la trasformazione di coordinate

58.26

$$(q_1,\ldots,q_N) \to (y_1,\ldots,y_N), \tag{58.26}$$

definita da

58.27 $$y_i(q) = \tilde{\alpha}_i(q), \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{58.27}$$

e

58.28 $$\begin{aligned} y_i(q) = q_i &+ \int_0^{\alpha_1} \mathrm{d}\alpha_1' \, f_{1i}\big(Q_1(q, \alpha_1')\big) \\ &+ \int_0^{\alpha_2} \mathrm{d}\alpha_2' \, f_{2i}\big(Q_2(Q_1(q, \alpha_1), \alpha_2')\big) + \ldots \\ &+ \int_0^{\alpha_M} \mathrm{d}\alpha_M' \, f_{Mi}\big(Q_M(Q_{M-1}(\ldots Q_1(q, \alpha_1), \ldots, \alpha_{M-1}), \alpha_M')\big), \\ & \qquad\qquad\qquad i = M+1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{58.28}$$

Si verifica innazitutto che

58.29 $$\frac{\partial y_i}{\partial q_j}(q_0) = \delta_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad j = M+1, \ldots, N, \tag{58.29}$$

mentre, per $i, j = 1, \ldots, M$, si ha

58.30 $$\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{M} f_{ki}(q_0) \frac{\partial y_k}{\partial q_j}(q_0) = 0, \tag{58.30}$$

così che, utilizzando le (58.21) e (58.23), *i.e.* il fatto che la matrice $M \times M$ di elementi $f_{ij}(q_0)$ ha determinante non nullo, otteniamo

58.31 $$\begin{aligned} \det &\begin{pmatrix} [\partial y_1/\partial q_1](q_0) & \ldots & [\partial y_1/\partial q_M](q_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [\partial y_M/\partial q_1](q_0) & \ldots & [\partial y_M/\partial q_M](q_0) \end{pmatrix} \\ &\equiv \det \begin{pmatrix} [\partial \tilde{\alpha}_1/\partial q_1](q_0) & \ldots & [\partial \tilde{\alpha}_1/\partial q_M](q_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [\partial \tilde{\alpha}_M/\partial q_1](q_0) & \ldots & [\partial \tilde{\alpha}_M/\partial q_M](q_0) \end{pmatrix} \\ &= - \left[ \det \begin{pmatrix} f_1(q_0) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & f_M(q_0) \end{pmatrix} \right]^{-1} \neq 0, \end{aligned} \tag{58.31}$$

e quindi la matrice jacobiana

58.31$a$ $$\begin{pmatrix} [\partial \tilde{\alpha}_1/\partial q_1](q_0) & \ldots & [\partial \tilde{\alpha}_1/\partial q_M](q_0) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\partial \tilde{\alpha}_M/\partial q_1](q_0) & \ldots & [\partial \tilde{\alpha}_M/\partial q_M](q_0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{58.32}$$

della trasformazione data dalle (58.27) e (58.28), ha determinante non nullo. Inoltre, poiché le funzioni (58.24) hanno la stessa regolarità dei campi vettoriali, segue che la trasformazione (58.27) è non solo non singolare ma anche della stessa regolarità dei campi vettoriali.

Si verifica facilmente (cfr. l'esercizio 9), a partire, dalle definizioni di $\tilde{\alpha}_i$ e di $y_i$, che, per ogni $i = 1, \ldots, M$ e per ogni $k = 1, \ldots, N$, risulta

58.32
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\alpha}_i}{\mathrm{d}\alpha_i} = -1, \qquad \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}\alpha_i} = 0, \qquad \forall k \neq i, \tag{58.33}$$

così che, nelle coordinate $y' = -y$, il gruppo di trasformazioni associate al campo vettoriale $\xi_i$ assume le forma

58.33
$$y'_i \to y'_i + \alpha_i, \qquad y'_k \to y'_k, \qquad k \neq i, \tag{58.34}$$

che quindi dimostra l'asserto. ■

p.58.15 **58.15.** *Osservazione.* Il teorema 58.13 implica che se i campi $\xi_1, \ldots, \xi_M$ commutano, allora è possibile utilizzare i parametri dei sottogruppi di trasformazioni associati ai campi vettoriali come coordinate indipendenti, almeno in un intorno abbastanza piccolo $U'$.

p.58.16 **58.16.** DEFINIZIONE (SOLLEVAMENTO DI UN CAMPO VETTORIALE). *Dato un campo vettoriale $\xi$ definito su una varietà regolare $\Sigma$, sia $\{f_k(q)\}_{k=1}^N$ la sua rappresentazione in un sistema di coordinate $q$. Se $(q, \eta)$ sono le coordinate utilizzate per descrivere localmente il fibrato tangente $T\Sigma$, si definisce* sollevato del campo vettoriale $\xi$ *il campo vettoriale $T\xi$ rappresentato dalle funzioni*

58.34
$$\left\{ f_k(q), \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial f_k(q)}{\partial q_h} \eta_h \right\}_{k=1}^{N}, \tag{58.35}$$

*definito su $T\Sigma$.*

p.58.17 **58.17.** *Osservazione.* La definizione 58.16 ha la seguente motivazione.

Sia $(q, \eta) \to A(q, \eta)$ una funzione differenziabile definita su $T\Sigma$. Se $Q(q, \alpha)$ è la soluzione del sistema di equazioni

58.35
$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\alpha} = f_k(Q), \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{58.36}$$

individuato dal campo vettoriale $\xi$, ricordiamo che i vettori tangenti $\eta$ si trasformano secondo la (57.7), *i.e.*

58.37
$$\eta_k \to \widetilde{\eta}_k \equiv \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial Q_k}{\partial q_h} \eta_h, \tag{58.37}$$

e quindi

58.38
$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\eta}_k}{\mathrm{d}\alpha} = \sum_{h=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\eta_h \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_h}\right) = \sum_{h=1}^{N} \eta_h \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\alpha} = \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial q_h}\,\eta_h. \tag{58.38}$$

Si ha allora

58.36
$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} &= \sum_{k=1}^{N}\left.\left(\frac{\mathrm{d}Q_k(q)}{\mathrm{d}\alpha}\,\frac{\partial A}{\partial q_k} + \frac{\mathrm{d}\widetilde{\eta}_k}{\mathrm{d}\alpha}\,\frac{\partial A}{\partial \eta_k}\right)\right|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=1}^{N} f_k(q)\,\frac{\partial A}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{N}\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{\eta}_k}{\mathrm{d}\alpha}\,\frac{\partial A}{\partial \eta_k}\right|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=1}^{N} f_k(q)\,\frac{\partial A}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{h=1}^{N}\frac{\partial f_k(q)}{\partial q_h}\,\eta_h\right)\frac{\partial A}{\partial \eta_k} \equiv \partial_{T\xi}A, \end{aligned} \tag{58.39}$$

dove abbiamo utilizzato la (58.38). La (58.39) giustifica quindi la definizione 58.16.

p.58.18 **58.18.** LEMMA. *Dati due campi vettoriali $\xi$ e $\zeta$ su $\Sigma$, siano $T\xi$ e $T\zeta$ i loro sollevati. Allora risulta*

58.39
$$[T\xi, T\zeta] = T[\xi,\zeta], \tag{58.40}$$

*se $[\xi,\zeta]$ è il prodotto di Lie dei due campi e $[T\xi, T\zeta]$ è il prodotto di Lie dei loro sollevati.*

p.58.19 **58.19.** *Dimostrazione del lemma 58.18.* Dalla definizione 58.4 e dalla (58.39) segue che il prodotto di Lie $[T\xi, T\zeta]$ è tale che, per ogni funzione $A$ due volte differenziabile su $T\Sigma$, si ha

58.40
$$\partial_{[T\xi,T\zeta]}A = \left.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\beta}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}\right)\right]\right|_{\alpha=\beta=0}. \tag{58.41}$$

Utilizzando allora di nuovo la (58.39) per calcolare $\partial_{T[\xi,\zeta]}$ e l'espressione (58.6) per la rappresentazione del campo vettoriale $[\xi,\zeta]$ nel sistema di coordinate $q$, si verifica immediatamente l'identità

58.41
$$\partial_{[T\xi,T\zeta]}A = \partial_{T[\xi,\zeta]}A, \tag{58.42}$$

da cui segue la (58.40). ■

p.58.20 **58.20.** COROLLARIO. *Dati due campi vettoriali $\xi$ e $\zeta$ su $\Sigma$, siano $T\xi$ e $T\zeta$ i loro sollevati. Si ha allora $[\xi,\zeta]=0$ se e solo se $[T\xi,T\zeta]=0$.*

p.58.21 **58.21.** *Dimostrazione del corollario 58.20.* Segue immediatamente dall'identità (58.40). ■

p.58.22 **58.22.** TEOREMA (NOETHER). *Consideriamo $M$ gruppi a un parametro $\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_M$ di diffeomorfismi, indipendenti tra loro, dello spazio delle configurazioni in sé. Si può* *trovare un sistema di coordinate tale che $M$ di esse siano cicliche per ogni lagrangiana che sia lasciata invariante da tutti i gruppi se e solo se sono soddisfatte le relazioni (58.11) per ogni $i, j = 1, \ldots, M$. In tal caso i parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ possono essere utilizzati come coordinate.*

p.58.23 **58.23.** *Dimostrazione del teorema 58.22.* Per il teorema 58.11, le relazioni (58.11) sono equivalenti alle (58.10), e per il teorema 58.13 sono quindi soddisfatte se e solo se esiste un opportuno sistema di coordinate locali in cui i campi vettoriali sono rappresentati dalle (58.19). Questo vuol dire che le trasformazioni associate, in tale sistema di coordinate, sono date da

58.44
$$q_i \to q_i + \alpha_i, \qquad q_k \to q_k, \qquad \forall k \neq i, \tag{58.43}$$

(che ovviamente soddisfano le regole di commutazione (58.11)).

In conclusione valgono le (58.11) se e solo se esiste un sistema di coordinate locali $q$ in cui le trasformazioni che rappresentano i gruppi a un parametro sono date dalle (58.43).

Supponiamo ora che i gruppi di diffeomorfismi lascino invariante la lagrangiana e soddisfino le (58.11). Nel sistema di coordinate $q$, le coordinate $q_i$, $i = 1, \ldots, M$, devono quindi essere variabili cicliche (in particolare si possono utilizzare come coordinate proprio gli i parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$).

Viceversa, supponiamo che nel sistema di coordinate $q$ le variabili $q_1, \ldots, q_M$ siano cicliche. Allora le trasformazioni (58.43) lasciano invariante la lagrangiana, e quindi, se definiamo $g_i(\alpha_i)$ le trasformazioni date dalle (58.43), seguono le (58.11). ■

p.58.24 **58.24.** TEOREMA. *Sia $\Sigma$ una varietà regolare e sia $\mathcal{L} : T\Sigma \to \mathbb{R}$ una lagrangiana definita su $\Sigma$. Se i campi vettoriali $\xi_1$ e $\xi_2$ corrispondono a gruppi di simmetrie di $\mathcal{L}$, allora anche il loro prodotto di Lie $[\xi_1, \xi_2]$ corrisponde a un gruppo di simmetrie di $\mathcal{L}$.*

p.58.25 **58.25.** *Dimostrazione del teorema 58.24.* Se la lagrangiana $\mathcal{L}$ è invariante sotto l'azione dei gruppi di simmetrie associati ai campi vettoriali $\xi_1$ e $\xi_2$ si ha allora

58.45
$$\partial_{T\xi_1} \mathcal{L} = \partial_{T\xi_2} \mathcal{L} = 0. \tag{58.44}$$

Quindi, per la definizione 58.4 di prodotto di Lie, si ha

58.46
$$\partial_{[T\xi_1, T\xi_2]} \mathcal{L} = 0 \tag{58.45}$$

e, per il corollario 58.20,

58.47
$$\partial_{T[\xi_1, \xi_2]} \mathcal{L} = 0, \tag{58.46}$$

che mostra l'invarianza di $\mathcal{L}$ sotto l'azione del gruppo a un parametro associato al campo vettoriale $[\xi_1, \xi_2]$. Quindi tale gruppo è ancora un gruppo di simmetrie. ■

p.58.26 **58.26.** *Osservazione.* Siano $\xi_1$ e $\xi_2$ due campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$, tali che le funzioni $\{f_{1k}(q)\}_{k=1}^N$ e $\{f_{2k}(q)\}_{k=1}^N$ che li rappresentano nel sistema di coordinate $q$ siano lineari. Quindi

58.48 $$f_{ik}(q) = \sum_{h=1}^{N} A_{ikh} q_h, \qquad i = 1, 2, \tag{58.47}$$

dove $A_{ikh}$ sono gli elementi della matrice $A_i$, $i = 1, 2$. Allora anche il campo vettoriale $[\xi_1, \xi_2]$ è rappresentato da funzioni lineari, e la matrice corrispondente è data da

58.49 $$A_2 A_1 - A_1 A_2 \equiv [A_2, A_1], \tag{58.48}$$

che definisce il commutatore delle due matrici $A_2$ e $A_1$; cfr. l'esercizio 10.

p.58.27 **58.27.** Esempio. Siano $\xi_1$ e $\xi_2$ i campi vettoriali associati alle rotazioni intorno a due assi cartesiani tra loro ortogonali, *e.g.* intorno agli assi $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ di una terna cartesiana. In questo caso i campi vettoriali sono rappresentati da funzioni della forma (58.47); cfr. l'esercizio 11. È allora immediato verificare che la matrice data dalla (58.48) corrisponde a un campo vettoriale $\xi_3 = [\xi_1, \xi_2]$ associato alle rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, dove $[\cdot, \cdot]$ indica il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$; cfr. l'esercizio 12. Possiamo quindi applicare il teorema 58.24 e concludere che la conservazione di due componenti del momento angolare (corrispondente per il teorema 57.23 all'invarianza della lagrangiana per rotazioni intorno a due assi ortogonali; cfr. l'esempio 57.17) implica la conservazione anche della terza componente (corrispondente, di nuovo per il teorema 57.23, all'invarianza per rotazioni intorno all'asse definito dal prodotto vettoriale dei due dati).

p.58.28 **58.28.** Esempio. Consideriamo la quantità di moto

58.50 $$\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{p}^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\mathbf{x}}^{(n)}, \tag{58.49}$$

di un sistema di $N$ punti materiali. I campi vettoriali $\xi_k$, $k = 1, 2, 3$, associati alle componenti della quantità di moto sono rappresentati, nelle coordinate $x$, da funzioni costanti, quindi

58.51 $$[\xi_i, \xi_j] = 0, \qquad \forall i, j = 1, 2, 3, \tag{58.50}$$

e dal teorema 58.22 segue che, per ogni lagrangiana $\mathcal{L}$ lasciata invariante dai gruppi di trasformazioni associati ai campi $\xi_k$, $k = 1, 2, 3$, è possibile trovare (localmente) un sistema di coordinate in cui tre di esse siano cicliche. Fisicamente tali coordinate rappresentano le coordinate del centro di massa del sistema. Dal momento che vale la (58.50) non possiamo applicare il teorema 58.24, *i.e.* la conservazione di due componenti della quantità di moto non implica che anche la terza debba essere conservata.

p.58.29 **58.29.** Esercizio. Si dimostri che se, per un punto materiale nello spazio euclideo tridimensionale $E^3$, sono conservate (1) due componenti del momento angolare e (2) la componente restante della quantità di moto, allora sono conservati sia il momento angolare totale sia la quantità di moto totale; cfr. l'esercizio 13.

p.58.30 **58.30.** *Osservazione.* Nel caso di un corpo rigido con un punto fisso, in assenza di forze esterne, sono costanti del moto l'energia e il momento angolare. Si hanno quindi 4 costanti del moto, così che, sebbene *a priori* lo spazio delle fasi del sistema sia $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^6$, si può in realtà parametrizzare il moto in $\mathbb{R}^2$: in altre parole il moto si svolge su una superficie di dimensione 2. La descrizione così ottenuta corrisponde a quella geometrica secondo Poinsot che utilizza la poloide e l'erpoloide (cfr. la discussione del paragrafo 45). Il sistema corrisponente, definito sulla superficie di dimensione 2, non è un sistema lagrangiano a un grado di libertà che si possa ottenere da quello di partenza mediante l'applicazione ripetuta del teorema 54.7. Infatti il gruppo delle rotazioni non contiene sottogruppi che soddisfino le condizioni (58.50), quindi non è possibile applicare il teorema 58.22; in particolare non è possibile trovare un sistema di coordinate in cui tre siano cicliche. Notiamo che se questo fosse possibile la lagrangiana non dovrebbe dipendere da alcuna delle tre variabili che determinano la configuraziond del sistema, e i corrispondenti momenti dovrebbero essere costanti: come conseguenza il moto diverrebbe banale. È noto invece che questo non succede.

## Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati nel presente capitolo abbiamo seguito prevalentemente [Dell'Antonio], Cap. VIII, e, in parte, [Arnol'd 2] per alcuni complementi.

## Esercizi

**Esercizio 1.** Si discuta l'esempio 57.16. [*Soluzione.* Si consideri prima il caso di un solo punto materiale di massa $m$ in $\mathbb{R}^3$ e si consideri la trasformazione $q \to Q(q,\alpha)$ definita da $Q_i(q,\alpha) = q_i + \alpha$ e $Q_j(q,\alpha) = q_j$ per $j \neq i$. Il campo vettoriale associato $\xi$ ha componenti $\{f_k(q)\}_{k=1}^3$, con $f_k(q) = \delta_{ik}$, e quindi il momento $\pi_\xi^{\mathcal{L}}$ associato a $\xi$ è dato da $\pi_\xi^{\mathcal{L}} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i = m\dot{q}_i$, ed è quindi la componente $i$-esima della quantità di moto. Si generalizza facilmente al caso di più punti materiali.]

**Esercizio 2.** Si discuta l'esempio 57.17. [*Soluzione.* Si consideri prima il caso di un solo punto materiale di massa $m$ in $\mathbb{R}^3$ e si consideri la trasformazione $q \to Q(q,\alpha)$ definita da $Q(q,\alpha) = S^{(i)}(\alpha)$, dove $S^{(i)}(\alpha)$ descrive una rotazione di un angolo $\alpha$ intorno all'asse $e_i$. Supponiamo per concretezza che sia $i = 3$ (gli altri casi si trattano in modo analogo). Il campo vettoriale associato $\xi$ ha componenti $\{f_1(q)\}_{k=1}^3$, con $f_1(q) = -q_2$, $f_1(q) = q_1$ e $f_3(q) = 0$, e quindi il momento $\pi_\xi^{\mathcal{L}}$ associato a $\xi$ è dato da $\pi_\xi^{\mathcal{L}} = f_1(q)\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_1 + f_2(q)\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_2 = mq_2\dot{q}_1 - mq_1\dot{q}_2 = [mq,\dot{q}]_3$, ed è quindi la terza componente del momento angolare. Si generalizza poi facilmente al caso di più punti materiali.]

**Esercizio 3.** Dimostrare la proprietà (1) del lemma 58.5. [*Soluzione.* Si vede dalla definizione

(58.5) che la derivazione associata a $-[\xi_1, \xi_2]$ è l'opposta della derivazione associata a $[\xi_1, \xi_2]$, e da qui segue immediatamente l'asserto.]

**Esercizio 4.** Dimostrare la proprietà (2) del lemma 58.5. [*Soluzione.* Segue dalla linearità della derivazione.]

**Esercizio 5.** Dimostrare la proprietà (3) del lemma 58.5. [*Soluzione.* Si considearno le derivazioni associate ai tre campi vettoriali $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ e si verifica, utilizzando la definizione 58.4 che la derivazione associata al campo vettoriale $\zeta \equiv [\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0$ è data da

$$\begin{aligned} &(\partial_1 \partial 2 \partial_3 - \partial_2 \partial 3 \partial_1 - \partial_2 \partial 3 \partial_1 + \partial_3 \partial 2 \partial_1) \\ &\quad + (\partial_2 \partial 3 \partial_1 - \partial_2 \partial 1 \partial_3 - \partial_3 \partial 1 \partial_2 + \partial_1 \partial 3 \partial_2) \\ &\qquad + (\partial_3 \partial 1 \partial_2 - \partial_3 \partial 2 \partial_1 - \partial_1 \partial 2 \partial_3 + \partial_2 \partial 1 \partial_3)\,, \end{aligned}$$

dove $\partial_k$ è una notazione abbreviata per $\partial_{\xi_k}$. Quindi $\partial_\zeta = 0$.]

**Esercizio 6.** Dimostrare che la (58.11) implica la (58.12). [*Soluzione.* Le relazioni (58.11) implicano $Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = Q_j(Q_i(q, \alpha_i), \alpha_j)$ per ogni $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{R}$. Sia $A$ una funzione due volte differenziabile su $\Sigma$, e siano $\{f_{ik}(q)\}_{k=1}^N$ le funzioni che rappresentano localmente i diffeomorfismi $g_i(\alpha_i)$. Utilizzando le (57.8) e (57.9) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_i}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha_j}\right)\bigg|_{\alpha_i=\alpha_j=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_i}\left(\frac{\mathrm{d}A(Q_j(Q_i(q,\alpha_i),\alpha_j))}{\mathrm{d}\alpha_j}\right)\bigg|_{\alpha_i=\alpha_j=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_i}\left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial A(Q_j(Q_i(q,\alpha_i),\alpha_j))}{\partial Q_{jk}} \frac{\mathrm{d}Q_{jk}(Q_i(q,\alpha_i),\alpha_j)}{\mathrm{d}\alpha_j}\bigg|_{\alpha_j=0}\right)\Bigg|_{\alpha_i=0} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^N \bigg( \frac{\partial f_{jk}(Q_i(q,\alpha_i))}{\partial Q_{ih}} \frac{\mathrm{d}Q_{ih}(q,\alpha_i)}{\mathrm{d}\alpha_i} \frac{\partial A(Q_i(q,\alpha_i))}{\partial Q_{ik}} \\ &\qquad + \frac{\partial^2 A(Q_i(q,\alpha_i))}{\partial Q_{jk}\partial Q_{ih}} \frac{\mathrm{d}Q_{ih}(q,\alpha_i)}{\mathrm{d}\alpha_i} f_{jk}(Q_i(q,\alpha_i))\bigg)\bigg|_{\alpha_i=0} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^N \left( \frac{\partial f_{jk}(q)}{\partial q_h} f_{ih}(q) \frac{\partial A(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 A(q)}{\partial q_k \partial q_h} f_{ih}(q) f_{jk}(q)\right) \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_j}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha_i}\right)\bigg|_{\alpha_i=\alpha_j=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_j}\left(\frac{\mathrm{d}A(Q_i(Q_j(q,\alpha_j),\alpha_i))}{\mathrm{d}\alpha_j}\right)\bigg|_{\alpha_i=\alpha_j=0} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^N \left( \frac{\partial f_{ik}(q)}{\partial q_h} f_{jh}(q) \frac{\partial A(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 A(q)}{\partial q_k \partial q_h} f_{jh}(q) f_{ik}(q)\right) \end{aligned}$$

così che la uguagliando a zero la differenza delle due espressioni trovate si ottiene

$$\sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^N \left( f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h}\right) \frac{\partial A}{\partial q_k} = 0,$$

che implica $[\xi_i, \xi_j] = 0$ per la (58.9).]

**Esercizio 7.** Dedurre la (58.15).

**Esercizio 8.** Dimostrare che se $\xi_1, \ldots, \xi_N$ sono $N$ vettori linearmente indipendenti allora è possibile scegliere un sistema di coordinate in cui le loro componenti siano rappresentate dalle (58.21).

**Esercizio 9.** Dimostrare le (58.34).

**Esercizio 10.** Dimostrare che dati due campi vettoriali $\xi_1$ e $\xi_2$ rappresentati dalla (58.47), allora il campo vettoriale $\xi_3 = [\xi_1, \xi_2]$ è rappresentato dalle funzioni

$$f_{3k}(q) = \sum_{h=1}^{N} A_{3kh} q_h,$$

con $A_3 = [A_2, A_1] = A_2 A_1 - A_1 A_2$. [*Suggerimento.* Basta applicare la formula (58.6), con $f_k = f_{1k}$ e $g_k = f_{2k}$, per determinare le funzioni $f_{3k}(q)$ che rappresentano il campo vettoriale $\xi_3$.]

**Esercizio 11.** Dimostrare che il campo vettoriale associato a una rotazione intorno a un asse cartesiano e' rappresentato da funzioni della forma (58.47). [*Soluzione.* Si consideri per esempio una rotazione $S^{(1)}(\alpha)$ di una angolo $\alpha$ intorno all'asse $\mathbf{e}_1$. Allora $Q(q, \alpha) = S^{(1)}(\alpha) q$, così che si ha

$$\frac{\mathrm{d}Q(q,\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}S^{(1)}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} q = \frac{\mathrm{d}S^{(1)}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} (S^{(1)}(\alpha))^{-1} Q(q,\alpha) \equiv A^{(1)}(\alpha) Q(q,\alpha),$$

e quindi il campo vettoriale $\xi_1$ associato alla rotazione è dealla forma (58.47), con

$$A^{(1)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ragiona per le rotazioni intorno agli assi $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$, per le quali si trova che i campi vettoriali hanno la forma (58.47) con $A$ data da

$$A^{(2)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{(3)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rispettivamente.]

**Esercizio 12.** Dimostrare che se $\xi_i$ e $\xi_j$ sono i campi vettoriali associati alle rotazioni intorno agli assi cartesiani $\mathbf{e}_i$ ed $\mathbf{e}_j$, con $1 \le i \ne j \le 3$, allora il campo vettoriale $\xi_k = [\xi_i, \xi_j]$ è associato a rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_k = [\xi_i, \xi_j]$. [*Suggerimento.* Si usino i risultati dell'esercizio 11.]

**Esercizio 13.** Discutere l'esempio 58.29. [*Soluzione.* Utilizzando i risultati degli esercizi 1 e 2, dalla (58.6) si trova che, indicando con $P_x, P_y, P_z$ i campi vettoriali associati alle componenti $p_x, p_y, p_z$ della quantità di moto e con $L_x, L_y, L_z$ i campi vettoriali associati alle componenti $l_x, l_y, l_z$ del momento angolare, valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
&[L_x, L_y] = L_z, \qquad [L_y, L_z] = -L_x, \qquad [L_z, L_x] = L_x, \\
&[P_x, P_y] = 0, \qquad [P_y, P_z] = 0, \qquad [P_z, P_x] = 0, \\
&[L_x, P_y] = -P_z, \qquad [L_x, P_z] = P_y, \qquad [L_x, P_x] = 0, \\
&[L_y, P_z] = P_x, \qquad [L_y, P_x] = -P_z, \qquad [L_y, P_y] = 0, \\
&[L_z, P_x] = P_y, \qquad [L_z, P_y] = -P_x, \qquad [L_z, P_z] = 0,
\end{aligned}$$

da cui segue il risultato.]

**Esercizio 14.** Discutere il moto di un punto materiale in un campo centrale alla luce dei risultati del paragrafo 58. Dedurre in particolare che, nonostante si conservi il momento angolare, non è possibile trovare tre coordinate cicliche ma solo due (cfr. l'esempio 54.11).

**Esercizio 15.** Nel caso dell'esercizio 14 discutere perché la conservazione dell'energia non introduca un'ulteriore variabile ciclica. Spiegare perché il moto avviene in $\mathbb{R}^2$ anziché in $\mathbb{R}^6$.

**Esercizio 16.** Dimostrare che dati due campi vettoriali $\xi_1$ e $\xi_2$ associati a due gruppi di simmetrie per un sistema lagrangiano $(\Sigma, \mathcal{L})$, allora o esiste un altro gruppo di simmetrie o si può trovare un sistema di coordinate in cui due coordinate sono cicliche. [*Soluzione.* Se $[\xi_1, \xi_2] \neq 0$ allora esiste un terzo gruppo di simmetrie di $\mathcal{L}$, per il Teorema 58.24, mentre se $[\xi_1, \xi_2] = 0$ possiamo applicare il Teorema 58.22.]