Capitolo 16. Meccanica Hamiltoniana

sec.65 65. Sistemi Hamiltoniani

p.65.1 **65.1. Introduzuine.**

p.65.2 **65.2.** DEFINIZIONE (TRASFORMATA DI LEGENDRE) *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *convessa (*$f''(x) > 0$*). La funzione*

65.1
$$g(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(xy - f(x) \right). \tag{65.1}$$

è chiamata la trasformata di Legendre *della funzione* f*.*

p.65.3 **65.3.** Se in (65.1) l'estremo superiore è anche un massimo, allora viene raggiunto in corrispondenza di un punto $x = x(y)$ tale che $f'(x(y)) = y$. Possiamo allora scrivere

65.1a
$$g(y) = y\,x(y) - f(x(y)), \qquad f'(x(y)) = y, \tag{65.2}$$

in alternativa alla (65.1).

Si ha che g è una funzione convessa di classe C^2. Infatti risulta $g'(y) = (f')^{-1}(y)$ (cfr. l'esercizio 1), e quindi, per la regola di derivazione della funzione inversa, $g''(y) = 1/f''(x(y)) > 0$ (cfr. l'esercizio 2).

p.65.4 **65.4.** La trasformata di Legendre è una *trasformazione involutiva* (o *involuzione*), cioè la trasformata di Legendre della funzione (65.1) è la funzione f stessa. questo vuol dire che se $g(y)$ è definita come in (65.1) allora si ha (cfr. l'esercizio 3)

65.2
$$f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(yx - g(y) \right). \tag{65.3}$$

e se l'estremo superiore è un massimo allora è raggiunto in corrispondenza di un valore $y = y(x)$ tale che $g'(y(x)) = x$.

p.65.5 **65.5.** In più dimensioni, data una funzione $f(x)$ di classe C^2 convessa, cioè tale che

65.3
$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \right) > 0, \tag{65.4}$$

si definisce

65.4
$$g(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle x, y \rangle - f(x) \right) \tag{65.5}$$

la sua trasformata di Legendre. Di nuovo anche la funzione $g(y)$ è convessa, e la sua trasformata di Legendre è la funzione $f(x)$.

p.65.6 **65.6.** Esempio. $f(x) = ax$, $a > 0$ (non strettamente convessa). Allora (cfr. l'esercizio 4)

65.5
$$g(y) = \begin{cases} 0, & y = a \ , \\ \infty, & y \neq a \ , \end{cases} \tag{65.6}$$

p.65.7 **65.7.** Esempio. $f(x) = ax^2/2$, $a > 0$ (strettamente convessa). Allora (cr. l'esercizio 5) $g(y) = y^2/2a$.

p.65.8 **65.8.** Esempio. Data la lagrangiana

65.6
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle - U(q), \tag{65.7}$$

e posto $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$, si definisce $H(q,p)$ la sua trasformata di Legendre rispetto $\dot{q}$. Risulta

65.7
$$H(q,p) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + U(q) = \frac{1}{2} \left\langle p, A^{-1}(q)p \right\rangle - U(q). \tag{65.8}$$

Se $q \in \Sigma$, si ha $(q, \dot{q}) \in T\Sigma$, dove $T\Sigma$ indica il fibrato tangente di Σ. Si pone allora $z = (q,p) \in T^*\Sigma$ e si chiama $T^*\Sigma$ il *cofibrato tangente* di Σ. Si chiama *spazio delle fasi* l'insieme di definizione delle variabili (q,p).

p.65.9 **65.9.** Coordinate canoniche: posizione e momento coniugato.

La funzione $H(q,p)$ in (65.6) prende il nome di hamiltoniana: quindi la Hamiltoniana è la trasformata di Legendre della lagrangiana (e viceversa). Quindi in particolare si ha

65.8
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{65.9}$$

dal momento che H è la trasformata di Legendre di $\mathcal{L}$ rispetto alla variabile $\dot{q}$. Inoltre si vede facilmente che si ha

65.9
$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\langle p, \dot{q} \rangle - H(p,q) \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial p}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle - \frac{\partial H}{\partial q} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial p}{\partial q} \right\rangle = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{aligned} \tag{65.10}$$

dove si è usata la (65.9).

p.65.9a **65.10.** *Osservazione.* Si noti che la Hamiltoniana è definita a meno di una costante additiva. La situazione è quindi diversa dal caso della lagrangiana, che è invece definita a meno di una derivata totale (cfr. l'osservazione 47.29).

p.65.10 **65.11.** DEFINIZIONE (EQUAZIONI HAMILTONIANE). *Data una Hamiltoniana* $H = H(q,p,t)$ *di classe* C^2 *si definiscono* equazioni di Hamilton *le equazioni*

65.10
$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \end{cases} \tag{65.11}$$

che costituiscono un sistema di $2n$ *equazioni differenziali del primo ordine.*

p.65.11 **65.12.** DEFINIZIONE (MATRICE SIMPLETTICA STANDARD). *Chiamiamo* matrice simplettica standard *la matrice* $2n \times 2n$

65.11
$$E = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{65.12}$$

dove $0, \mathbb{1}$ *sono matrici* $n \times n$.

p.65.12 **65.13.** *Osservazione.* Data la matrice simplettica standard E si ha

65.12
$$E^T = -E, \qquad E^{-1} = -E, \qquad E^2 = -\mathbb{1}, \tag{65.13}$$

come è immediato verificare (cfr. l'esercizio 4).

p.65.13 **65.14.** DEFINIZIONE (EQUAZIONI CANONICHE). *Sia un sistema dinamico in* $\mathbb{R}^{2n}$ *descritto dalle equazioni* $\dot{z} = f(z)$. *Diremo che tali equazioni sono* equazioni canoniche *se esiste una funzione* H *di classe* C^2 *in* $\mathbb{R}^{2n}$ *tale che si abbia* $f = E\partial H/\partial z$.

p.65.14 **65.15.** *Osservazione.*

p.65.15 **65.16.** DEFINIZIONE (SISTEMA HAMILTONIANO). *Data una varietà* Σ *e una funzione* $H \colon T^*\Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2 *si definisce* sistema hamiltoniano *la coppia* (Σ, H).

p.65.16 **65.17.** DEFINIZIONE (CAMPO VETTORIALE HAMILTONIANO). *Si definisce* campo vettoriale hamiltoniano *associato all'Hamiltoniana* H *il campo vettoriale*

65.13
$$f_H = E\frac{\partial H}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right), \tag{65.14}$$

dove $z = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ *e* $\partial/\partial z = (\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_{2n})$.

p.65.17 **65.18.** *Osservazione.* È facile vedere che il campo vettoriale hamiltoniano è un campo vettoriale a divergenza nulla, i.e.

65.14
$$\operatorname{div} f_H = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} E_{kj} \frac{\partial^2 H}{\partial z_k \partial z_j} = 0, \tag{65.15}$$

dove $f_H(z)$ è definito in (65.14) e si è utilizzata l'antisimmetria di E (i.e. $E_{ik} = -E_{ki}$).

p.65.18 **65.19.** Definizione (Trasformazione che conserva il volume). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme aperto. Dato un dominio* $D \subset \Omega$ *chiamiamo*

65.15
$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D \mathrm{dx} \tag{65.16}$$

il volume del dominio D*. Diremo che una trasformazione* $\varphi : \Omega \to \Omega$ *che dipende dal parametro continuo* t *è una* trasformazione che conserva il volume *se per ogni sottoinsieme* $D \subset \Omega$*, se indichiamo con*

65.16
$$D(t) = \varphi(t, D) = \bigcup_{x \in D} \varphi(t, x) \tag{65.17}$$

il volume dell'insieme ottenuto facendo evolvere i punti di $D = D(0)$ *al tempo* t*, si ha*

65.17
$$\mathrm{Vol}(D(t)) = \mathrm{Vol}(D) \tag{65.18}$$

per ogni t*.*

p.65.19 **65.20.** Teorema (Liouville). *Il flusso hamiltoniano conserva il volume.*

p.65.20 **65.21.** *Dimostrazione.*

p.65.21 **65.22.** *Osservazione.* Assenza di cicli limite e punti d'equilibrio asintoticamente stabili per sistemi Hamiltoniani.

p.65.22 **65.23.** Teorema (Teorema del ritorno di Poincaré). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme compatto e sia* $\varphi \colon \Omega \to \Omega$ *una trasformazione che conserva il volume. Per ogni aperto* $U \subset \Omega$ *e ogni tempo* $\tau > 0$ *esiste* $x \in U$ *e* $t > \tau$ *tali che* $\varphi(t, x) \in U$*.*

p.65.23 **65.24.** *Dimostrazione.*

p.65.24 **65.25.** *Osservazione.*

p.65.25 **65.26.** Osservazione: esperimento di Maxwell.

p.65.26 **65.27.** Coordinate cicliche e teorema di Routh nel formalismo hamiltoniano.

sec.66 66. Secondo principio variazionale di Hamilton

p.66.1 **66.1. Introduzione.** Indichiamo con $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ lo spazio delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \to (q(t), p(t))$ di classe C^1 tali che $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t_2) = q^{(2)}$. Indichiamo con $\mathcal{N}_0$ lo spazio delle deformazioni, cioè delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \to (u(t), v(t))$ di classe C^1 tali che $u(t_1 = u(t_2) = 0$ e $v(t_1) = v(t_2) = 0$.

p.66.2 **66.2.** Definizione (Funzionale d'azione) Definiamo funzionale d'azione il funzionale

66.1
$$J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\langle p(t), \dot{q}(t) \rangle - H(q(t), p(t), t) \right), \tag{66.1}$$

definito sullo spazio delle traiettorie $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ a valori in $\mathbb{R}$.

p.66.3 **66.3.** Teorema. *Il differenziale del funzionale d'azione è uguale a zero se e solo se valgono le equazioni di Hamilton (65.8).*

p.66.4 **66.4.** *Dimostrazione.* Si ha $DJ_\gamma(h) = 0$ per ogni deformazione $h = (u, v)$ se e solo se risulta

66.2
$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \bigg(& \langle v(t), \dot{q}(t) \rangle + \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle \\ & - \left\langle \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t), u(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t), v(t) \right\rangle \bigg) = 0, \end{aligned} \tag{66.2}$$

e, integrando per parti, si può riscrivere

66.3
$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle &= \langle p(t), u(t) \rangle \big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle \end{aligned} \tag{66.3}$$

dove si è utilizzato che $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Quindi la (66.2) diventa

66.4
$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \bigg(& \left\langle v(t), \dot{q}(t) - \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t) \right\rangle \\ & + \left\langle u(t), \dot{p}(t) + \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) \right\rangle \bigg) = 0, \end{aligned} \tag{66.4}$$

e data l'arbitrarietà della deformazione h, si ottengono le (65.11). ■

p.66.5 **66.5.** Principio (Secondo principio variazionale di Hamilton). *Dato un sistema meccanico conservativo, eventualmente soggetto a vincoli olonomi bilateri, le traiettorie che descrivono il moto sono i punti stazionari del funzionale d'azione.*

p.66.16 **66.6.**

Esercizi

Esercizio 1. Dimostrare che se $g(y)$ è la trasformata di Legendre (65.2) della funzione convessa $f(x)$ allora $g'(y) = (f')^{-1}(y)$. [*Soluzione.* Dalla (65.2) si ha $g'(y) = x(y) + yx'(y) - f'(x(y))x'(y)$, dove $'$ denota derivazione ripsetto al proprio argomento. Quindi $g'(y) = x(y) + x'(y)(y - f'(x)) = x(y)$ poiché $y = f'(x)$.]

Esercizio 2. Dimostrare che se $g(y)$ è la trasformata di Legendre (65.2) della funzione convessa $f(x)$ allora $g''(y) = 1/f''(x(y))$. [*Soluzione.* Poiché $G(y) = g'(y) = F^{-1}(y)$, dove $F(x) = f'(x)$, si ha $(F \circ G)(y) = F(G(y)) = y$, quindi, derivando rispetto a y otteniamo $F'(G(y))G'(y) = 1$. Di conseguenza $G'(y) = 1/F'(G(y)) = 1/F'(g'(y)) = 1/F'(x(y))$.]

Esercizio 3. Dimostrare che la trasformata di Legendre è una trasformazione involutiva. [*Soluzione.* Siano $g(y)$ la trasformata di Legendre di $f(x)$ e $\tilde{f}(z)$ la trasformata di Legendre di $g(y)$: allora $g(y) = y\,x(y) - f(x(y))$, dove $f'(x(y)) = y$, e $\tilde{f}(z) = z\,y(z) - g(y(z)) = z\,y(z) - y(z)\,x(y(z)) + f(x(y(z)))$, dove $g'(y(z)) = z$. Quindi l'asserto si ottiene se dimostriamo che $x(y(z)) = z$. Questo segue dal fatto che $x(y(z)) = x((g')^{-1}(z)) = (f')^{-1}((g')^{-1}(z)) = ((f')^{-1} \circ (g')^{-1})(z) = z$, poiché $f' \circ g' = \mathbb{1}$.]

Esercizio 4. Dimostrare che la trasformata di Legendre $g(y)$ della funzione $f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$, è data dalla (65.5).

Esercizio 5. Dimostrare che la trasformata di Legendre $g(y)$ della funzione $f(x) = ax^2/2$, con $a > 0$, è data da $g(y) = y^2/2a$.

Esercizio 6. Dimostrare le relazioni (65.13).

Esercizio 7.

Esercizio 8.