

Capitolo 17. Trasformazioni canoniche

sec.67

67. Trasformazioni canoniche e simplettiche

67.1. Introduzione. Iniziamo con alcuni richiami di analisi. Dato uno spazio vettoriale E indichiamo con E^* lo *spazio duale* di E , cioè lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari di E in $\mathbb{R}$. Dato un aperto $A \subset \mathbb{R}^N$ si definisce *forma differenziale* in A un'applicazione ω di A in $(\mathbb{R}^N)^*$. Fissata in $(\mathbb{R}^N)^*$ la base canonica $dz_1, \dots, dz_N$ possiamo scrivere

$$\omega = \sum_{k=1}^N f_k(z) dz_k \quad (67.1)$$

e diremo che la forma differenziale ω è di classe C^p se le funzioni f_k sono di classe C^p .

Sia γ una curva in $\mathbb{R}^N$, cioè un'applicazione regolare a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Definiamo *integrale della forma differenziale ω lungo la curva γ* il numero

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b dt \sum_{k=1}^N f_k(\gamma(t)) \frac{d\gamma_k(t)}{dt}, \quad (67.2)$$

dove γ_k sono le componenti dell'applicazione γ nella base fissata.

Se γ è una curva chiusa scriveremo l'integrale come

$$\oint_{\gamma} \omega. \quad (67.3)$$

La forma differenziale (67.1) si dice *esatta* se esiste una funzione ψ di classe C^1 tale $\omega = d\psi$, i.e. se $f_k = \partial\psi/\partial z_k$. La forma differenziale (67.1) si dice *chiusa* se si ha

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_j} = \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \quad (67.4)$$

per ogni $i, j = 1, \dots, N$.

Ricordiamo che una forma differenziale esatta è necessariamente chiusa. Il contrario non è vero (cfr. l'esercizio 1). Tuttavia in un insieme stellato, o più in generale in un insieme semplicemente connesso, una forma è esatta se e solo se è chiusa. Quindi localmente le nozioni di forma chiusa e di forma esatta coincidono.

67.2. DEFINIZIONE (MATRICE SIMPLETTICA). Una matrice A si dice *simplettica* se

$$A^T E A = E, \quad (67.5)$$

dove A^T indica la trasposta di A ed E è la matrice simplettica standard (65.12).

p.67.3 **67.3.** Osservazione. Sia A una matrice simplettica. Scriviamo A nella forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (67.6)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ matrici $n \times n$ reali. In termini di tali matrici la condizione (67.5) si legge

$$\begin{aligned} \gamma^T \alpha &= \alpha^T \gamma, \\ \delta^T \beta &= \beta^T \delta, \\ \delta^T \alpha - \beta^T \gamma &= \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (67.7)$$

p.67.4 **67.4.** LEMMA (PRODOTTO DI MATRICI SIMPLETTICHE). Se A e B sono due matrici simplettiche anche il prodotto AB è una matrice simplettica.

p.67.5 **67.5.** Dimostrazione. Se A e B sono due matrici simplettiche si ha $A^T E A = E$ e $B^T E B = E$, e quindi, posto $C = AB$, si ottiene $C^T E C = (AB)^T E AB = B^T A^T E AB = B^T E B = E$. ■

p.67.6 **67.6.** LEMMA. L'identità $\mathbb{1}$ e la matrice simplettica standard (65.12) sono matrici simplettiche.

p.67.7 **67.7.** Dimostrazione. Si ha $\mathbb{1}^T E \mathbb{1} = \mathbb{1} E \mathbb{1} = E$. Analogamente, utilizzando la (65.13), si ottiene $E^T E E = -E^2 E = \mathbb{1} E = E$. ■

p.67.8 **67.8.** LEMMA (INVERSA DI UNA MATRICE SIMPLETTICA). L'inversa di una matrice simplettica è simplettica.

p.67.9 **67.9.** Dimostrazione. Sia A una matrice simplettica. Dimostriamo innanzitutto che A è invertibile. Poiché $\det E = \det A^T \det E \det A = \det E (\det A)^2$ e $\det E = 1$ (come si verifica immediatamente; cfr. l'esercizio 3) si ha $\det A = \pm 1$, quindi esiste A^{-1} . Moltiplicando la (67.5) a destra per A^{-1} e a sinistra per E , utilizzando quindi il fatto che $E^2 = -\mathbb{1}$, otteniamo

$$A^{-1} = -E A^T E. \quad (67.8)$$

Per verificare se A^{-1} è simplettica consideriamo $(A^{-1})^T E A^{-1}$. Si ha per la (67.8)

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T E A^{-1} &= (E A^T E)^T E E A^T E = E^T A E^T E E A^T E \\ &= E A (-E A^T E) = E A A^{-1} = E, \end{aligned} \quad (67.9)$$

dove si è utilizzato anche che $E^T = -E$. ■

p.67.10 **67.10.** LEMMA (TRASPOSTA DI UNA MATRICE SIMPLETTICA). La trasposta di una matrice simplettica è simplettica.

p.67.11 **67.11.** Dimostrazione. Moltiplicando la (67.8) a destra per E e utilizzando che $E^2 = -\mathbb{1}$ si ottiene

$$(A^T)^T E A^T = A E A^T = A A^{-1} E = E, \quad (67.10)$$

che dimostra l'asserto. ■

p.67.12 **67.12.** Osservazione. Le matrici simplettiche formano un gruppo (cf. l'esercizio 4). Tale gruppo si indica con $\text{Sp}(2n)$, se la matrici sono $2n \times 2n$.

p.67.12a **67.13.** DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE DI COORDINATE). Chiameremo trasformazione di coordinate un'applicazione $z \rightarrow Z(z, t)$ di classe C^2 , con $z \in \mathbb{R}^{2n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{2n}$. Se $Z(z, t) = Z(z)$, i.e. Z non dipende esplicitamente dal tempo, diremo che la trasformazione di coordinate è indipendente dal tempo.

p.67.12b **67.14.** ESEMPIO. $Q = \alpha q$ e $P = \beta p$, con $H' = \alpha\beta H$.

p.67.12c **67.15.** ESEMPIO. $Q = p$ e $P = q$, con $H' = -H$.

p.67.13 **67.16.** DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE CANONICA). Una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ si dice trasformazione canonica se la matrice jacobiana $J = \partial Z(z, t)/\partial z$ è simplettica per ogni t .

p.67.14 **67.17.** DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE SIMPLETTICA). Una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ si dice trasformazione simplettica se è canonica e non dipende esplicitamente dal tempo, i.e. $Z(z, t) = Z(z)$.

p.67.15 **67.18.** DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE CHE CONSERVA LA STRUTTURA CANONICA DELLE EQUAZIONI). Una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ è una trasformazione che conserva la struttura canonica delle equazioni se per ogni funzione H di classe C^2 esiste una funzione K di classe C^2 tale che le soluzioni del sistema di equazioni $\dot{z} = E\partial H/\partial z$ sono trasformate in soluzioni del sistema di equazioni $\dot{Z} = E\partial K/\partial Z$.

p.67.12d **67.19.** Osservazione. Le trasformazioni di coordinate considerate negli esempi 67.14 e 67.15 conservano la struttura canonica delle equazioni. D'altra parte non sono trasformazioni canoniche, tranne il caso, nell'esempio 67.14, in cui si abbia $\alpha\beta = 1$

p.67.16 **67.20.** TEOREMA. Le trasformazioni canoniche conservano la struttura canonica delle equazioni.

p.67.17 **67.21.** Dimostrazione. Sia $z \rightarrow Z(z, t)$ una trasformazione canonica. Allora, se $J = \partial Z/\partial z$ è la matrice jacobiana della trasformazione (i.e. $J_{ik} = \partial Z_i/\partial z_k$) si deve avere $J^T E J = E$. Quindi si ha

$$67.11 \quad \dot{Z} = \frac{d}{dt} Z(z(t), t) = J \dot{z} + \frac{\partial Z}{\partial t} = J E \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial t} = J E J^T \frac{\partial \hat{H}}{\partial Z} + \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad (67.11)$$

dove abbiamo posto $\hat{H}(Z, t) = H(z(Z, t), t)$, con $Z \rightarrow z(Z, t)$ la trasformazione inversa di $z \rightarrow Z(z, t)$ (si noti che una trasformazione canonica è sempre invertibile per il

Lemma 67.8), e abbiamo usato il fatto che

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial z_i} &= \frac{\partial F(z(Z, t), t)}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial F(z(Z, t), t)}{\partial Z_k} \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \hat{F}(Z, t)}{\partial Z_k} \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} J_{ki} \frac{\partial \hat{F}(Z, t)}{\partial Z_k} = \sum_{k=1}^{2n} (J^T)_{ik} \frac{\partial \hat{F}(Z, t)}{\partial Z_k} = \left(J^T \frac{\partial \hat{F}(Z, t)}{\partial Z} \right)_i
 \end{aligned} \tag{67.12}$$

per ogni funzione F di classe C^1 (avendo definito $\hat{F}(Z, t) = F(z(Z, t), t)$).

Per completare la dimostrazione dobbiamo quindi far vedere che esiste una funzione Ψ tale che $\partial Z / \partial t = E \partial \Psi / \partial Z$, i.e. tale che

$$f \equiv -E \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial Z}. \tag{67.13}$$

Consideriamo allora la forma differenziale di classe C^1 (sotto le ipotesi di regolarità della trasformazione di coordinate)

$$\omega = \sum_{k=1}^{2n} f_k(Z) dZ_k. \tag{67.14}$$

Diremo che la forma differenziale (67.14) è esatta se esiste una funzione Ψ di classe C^2 tale che $f_k(Z) = \partial \Psi / \partial Z_k$, mentre diremo che è chiusa se si ha $\partial f_i / \partial Z_k = \partial f_k / \partial Z_i$ per ogni $i, k = 1, \dots, 2n$ (cfr. il paragrafo §67.1). Localmente ogni forma differenziale è esatta se e solo se è chiusa. Quindi per dimostrare la (67.13) dobbiamo far vedere che la forma differenziale (67.14) è chiusa, i.e. che la matrice A di elementi

$$A_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial Z_k} \tag{67.15}$$

è simmetrica. Si ha allora

$$A = \frac{\partial f}{\partial Z} = -E \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} = -E \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial t} J^{-1} = -E \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1}, \tag{67.16}$$

che possiamo riscrivere

$$A = E J_t E J^T E, \tag{67.17}$$

avendo posto $J_t = \partial J / \partial t$ per semplicità notazionale, e utilizzato la (67.8) con $A = J$. Si ha quindi

$$A^T = (E J_t E J^T E)^T = E^T J E^T J_t^T E^T = -E J E J_t^T E, \tag{67.18}$$

e quindi la differenza tra le (67.17) e (67.18) dà

$$A - A^T = E (J_t E J^T + J E J_t^T) E = E \frac{\partial}{\partial t} (J E J^T) E = E \frac{\partial E}{\partial t} E = 0, \tag{67.19}$$

dove si è utilizzato che J^T è simplettica (cfr. il Lemma 67.10) per scrivere $JEJ^T = E$ e si è tenuto conto che E è costante. In conclusione si ha $A = A^T$, i.e. A è simmetrica, e quindi esiste una funzione Ψ di classe C^2 tale che la forma differenziale (67.14) è il differenziale esatto di Ψ . Quindi nelle nuove coordinate Z il campo vettoriale è un campo vettoriale Hamiltoniano, con Hamiltoniana $K(Z) = \hat{H}(z) + \Psi(Z)$. Ovviamente se la trasformazione $z \rightarrow Z(z, t)$ non dipende esplicitamente dal tempo si ha $K(Z) = \hat{H}(z(Z))$. ■

p.67.18 **67.22. Osservazione.** Le trasformazioni simplettiche conservano la struttura canonica delle equazioni del moto, con la stessa Hamiltoniana. Quindi se $z = (q, p) \rightarrow Z = (Q, P)$ è una trasformazione simplettica, si ha $H(z, t) \rightarrow K(Z, t) = H(z(Z), t)$. Nel caso di trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo la nuova Hamiltoniana è invece della forma $K(Z, t) = H(z(Z, t), t) + \Psi(Z)$, dove la funzione Ψ è determinata dalla (67.13).

p.67.19 **67.23. Osservazione.** Abbiamo visto nel corso della dimostrazione del Lemma 67.8 che il determinante di una qualsiasi matrice simplettica A vale ± 1 . In realtà deve essere $\det A = 1$, anche la dimostrazione di tale proprietà non è assolutamente banale come dimostrare che $|\det A| = 1$. Prima di procedere con la dimostrazione diamo un risultato preliminare.

p.67.20 **67.24. LEMMA.** Data la matrice $2n \times 2n$

$$67.20 \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}, \quad (67.20)$$

con λ, μ matrici reali $n \times n$, si ha $\det \Lambda = |\det(\lambda + i\mu)|^2 \geq 0$.

p.67.21 **67.25. Dimostrazione.** Consideriamo la matrice

$$67.21 \quad Q = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (67.21)$$

dove $\mathbb{1}$ è l'identità $n \times n$. Si vede subito che Q è non singolare, e che la sua inversa è

$$67.22 \quad Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (67.22)$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} 67.23 \quad \det \Lambda &= \det(Q\Lambda Q^{-1}) = \det \begin{pmatrix} \lambda + i\mu & 0 \\ 0 & \lambda - i\mu \end{pmatrix} \\ &= \det(\lambda + i\mu) \det(\lambda - i\mu) = \det(\lambda + i\mu) \overline{\det(\lambda + i\mu)} = |\det(\lambda + i\mu)|^2, \end{aligned} \quad (67.23)$$

da cui segue l'asserto. ■

p.67.22 **67.26.** TEOREMA. *Sia A una matrice simplettica. Allora $\det A = 1$.*

p.67.23 **67.27.** Dimostrazione. Sia A una matrice simplettica. Scriviamo A nella forma (67.6). Consideriamo la matrice ΛA , con Λ data dalla (67.20): si ottiene facilmente

$$67.24 \quad \Lambda A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha - \mu\gamma & \lambda\beta - \mu\delta \\ \mu\alpha + \lambda\gamma & \mu\beta + \lambda\delta \end{pmatrix}. \quad (67.24)$$

Scegliamo in (67.20)

$$67.25 \quad \lambda = \delta^T, \quad \mu = \beta^T. \quad (67.25)$$

Risulta allora, tenendo conto delle (67.7),

$$67.26 \quad \Lambda A = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \beta^T\alpha + \delta^T\gamma & \beta^T\beta + \delta^T\delta \end{pmatrix}, \quad (67.26)$$

così che $\det(\Lambda A) = \det(\beta^T\beta + \delta^T\delta)$. D'altra parte la matrice $\beta^T\beta + \delta^T\delta$ è definita positiva. Questo si dimostra come segue. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$67.27 \quad \langle x, (\beta^T\beta + \delta^T\delta)x \rangle = \langle \beta x, \beta x \rangle + \langle \delta x, \delta x \rangle = |\beta x|^2 + |\delta x|^2 \geq 0. \quad (67.27)$$

Si può avere il segno uguale solo se $x = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\bar{x}$ autovettore sia di β sia di δ , i.e. $\beta\bar{x} = \delta\bar{x} = 0$. Ma in tal caso si avrebbe

$$67.28 \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\bar{x} \\ \delta\bar{x} \end{pmatrix} = 0, \quad (67.28)$$

e quindi il vettore $(0, \bar{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$ sarebbe autovettore di A associato all'autovalore 0. Questo non è possibile dal momento che $\det A = \pm 1 \neq 0$. Quindi la matrice $\beta^T\beta + \delta^T\delta$ è definita positiva, e il suo determinante è strettamente positivo. In conclusione si deve avere $\det(\Lambda A) = \det A \det \Lambda > 0$, che unito al fatto che $\det A = \pm 1$ e $\det \Lambda \geq 0$ implica $\det A = 1$ e $\det \Lambda > 0$. ■

p.67.24 **67.28.** Osservazione. Abbiamo visto che una trasformazione canonica conserva la struttura canonica delle equazioni del moto (cfr. il teorema 67.20). Gli esempi ♣66.7 e ♣66.8 mostrano che il viceversa non è vero, i.e. una trasformazione che conserva la struttura canonica delle equazioni non necessariamente è canonica. Nel caso di trasformazioni indipendenti dal tempo tuttavia vale il seguente risultato.

p.67.25 **67.29.** TEOREMA. *Sia $z \rightarrow Z(z)$ una trasformazione di coordinate indipendente dal tempo. Le due affermazioni seguenti sono equivalenti.*
(1) *La trasformazione è simplettica.*

(2) *La trasformazione conserva la struttura canonica delle equazioni con la stessa hamiltoniana.*

67.30. *Dimostrazione.* L'implicazione (1) $\implies$ (2) segue dal teorema 67.20 e dall'osservazione 67.22.

Per dimostrare l'implicazione (2) $\implies$ (1) supponiamo che la trasformazione $z \rightarrow Z(z)$ trasformi le soluzioni di $\dot{z} = E\partial H/\partial z$ nelle soluzioni di $\dot{Z} = E\partial K/\partial Z$, con $K(Z, t) = H(z(Z), t)$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial z_k}{\partial Z_i} \dot{Z}_i = \sum_{i=1}^{2n} (J^{-1})_{ki} \dot{Z}_i, \\ \frac{\partial H}{\partial z_k} &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial K}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial K}{\partial Z_i} J_{ik} = \sum_{i=1}^{2n} J_{ki}^T \frac{\partial K}{\partial Z_i}, \end{aligned} \quad (67.29)$$

dove $J = \partial Z/\partial z$ è la matrice jacobiana della trasformazione $z \rightarrow Z(z)$. Quindi possiamo riscrivere l'equazione $\dot{z} = E\partial H/\partial z$ come

$$\dot{z} = J^{-1} \dot{Z} = EJ^T \frac{\partial K}{\partial Z}, \quad (67.30)$$

che dà

$$\dot{Z} = JEJ^T \frac{\partial K}{\partial Z}, \quad (67.31),$$

e, tenuto conto che si ha $\dot{Z} = E\partial K/\partial Z$, otteniamo $JEJ^T = E$, i.e. J^T è simplettica, e quindi, per il Lemma 67.10, J è simplettica. ■

sec.68

68. Parentesi di Poisson

68.1. Introduzione.

68.2. DEFINIZIONE (PARENTESI DI POISSON). *Date due funzioni $F, G: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 chiamiamo parentesi di Poisson di F e G la funzione*

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial z}, E \frac{\partial G}{\partial z} \right\rangle, \end{aligned} \quad (68.1)$$

dove $z = (q, p)$ ed E è la matrice simplettica standard (65.12).

68.3. Proprietà delle parentesi di Poisson: linearità, antisimmetricità e identità di Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (68.2)$$

p.68.4 **68.4.** Legame delle parentesi di Poisson con il prodotto di Lie. Date due funzioni $A, B: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 possiamo considerare i due campi vettoriali hamiltoniani ξ_A e ξ_B , di componenti, rispettivamente, $E\partial A/\partial z_k$ ed $E\partial B/\partial z_k$. Sia $[\xi_A, \xi_B]$ il campo vettoriale ottenuto come prodotto di Lie dei due campi vettoriali ξ_A e ξ_B . Si ha allora (cfr. l'esercizio 6).

$$68.3 \quad [\xi_A, \xi_B] = \xi_{\{A, B\}}, \quad (68.3)$$

dove $\{A, B\}$ è la funzione che si ottiene come parentesi di Poisson di A e B . Allora le proprietà delle parentesi di Poisson si possono anche dimostrare, invece di utilizzare direttamente la definizione, a partire dalle analoghe proprietà del prodotto di Lie, e dall'osservazione banale che $\xi_{A+B} = \xi_A + \xi_B$.

p.68.5 **68.5.** DEFINIZIONE (INTEGRALE PRIMO). Una funzione $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrale primo (o costante del moto) se la sua derivata totale è nulla.

p.68.6 **68.6.** Osservazione. Sia dato un sistema hamiltoniano con Hamiltoniana H . Data allora una qualsiasi funzione $f: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 si ha

$$68.4 \quad \frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (68.4)$$

In particolare se f non dipende esplicitamente dal tempo ed è un integrale primo allora $\{f, H\} = 0$. Si dice in tal caso che la funzione f è in involuzione con la hamiltoniana H .

p.68.7 **68.7.** TEOREMA. Le equazioni del moto sono canoniche se e solo se

$$68.5 \quad \frac{d}{dt} \{F, G\} = \left\{ \frac{dF}{dt}, G \right\} + \left\{ F, \frac{dG}{dt} \right\}. \quad (68.5)$$

per ogni coppia di funzioni $F, G: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

p.68.8 **68.8.** Dimostrazione. Dimostriamo prima che se le equazioni del moto sono canoniche allora vale la (68.5). Se $\dot{z} = E\partial H/\partial z$, allora per ogni coppia di funzioni $F, G: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 si ha

$$68.6 \quad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (68.6)$$

per la (68.4). Sempre per la stessa (68.4) possiamo concludere che si ha

$$68.7 \quad \frac{d}{dt} \{F, G\} = \{\{F, G\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{F, G\}, \quad (68.7)$$

dove

$$68.8 \quad \begin{aligned} \{\{F, G\}, H\} &= -\{H, \{F, G\}\} = \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} \\ &= \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} = \{F, \{G, H\}\} + \{\{F, H\}, G\}, \end{aligned} \quad (68.8)$$

per l'antisimmetria delle parentesi di Poisson e l'identità di Jacobi, e

$$68.9 \quad \frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}. \quad (68.9)$$

Inserendo le (68.8) e (68.9) nella (68.7) troviamo

$$68.10 \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\{F, G\} &= \{\{F, H\}, G\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \{F, \{G, H\}\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\} \\ &= \left\{ \frac{dF}{dt}, G \right\} + \left\{ F, \frac{dG}{dt} \right\}, \end{aligned} \quad (68.10)$$

dove si sono utilizzate le (68.6).

Viceversa supponiamo che valga la (68.5) per ogni coppia di funzioni $F, G: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Se scriviamo $\dot{z} = f(z)$ dobbiamo far vedere che deve esistere una funzione H di classe C^2 tale che $f(z) = E\partial H/\partial z$. Scriviamo $f(z) = (R(z), -S(z))$: dobbiamo allora far vedere che si ha $R(q, p) = \partial H/\partial p$ e $S(q, p) = \partial H/\partial q$.

La definizione (68.1) implica

$$68.11 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad (68.11)$$

così che, scrivendo $\dot{q}_i = R_i$ e $\dot{p}_i = -S_i$, in virtù delle definizioni che abbiamo dato, si trova, derivando le (68.11) rispetto al tempo e utilizzando le (68.5),

$$68.12 \quad \frac{\partial R_i}{\partial q_j} = \frac{\partial S_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial R_i}{\partial p_j} = \frac{\partial R_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S_i}{\partial q_j} = \frac{\partial S_j}{\partial q_i}. \quad (68.12)$$

Se poniamo $\Psi = (S, R)$ possiamo riscrivere le (68.12) in modo più compatto come

$$68.13 \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial z_i}, \quad i, j = 1, \dots, 2n, \quad (68.13)$$

che è la condizione perché la forma differenziale

$$68.14 \quad \omega(z) = \sum_{k=1}^{2n} \Psi_k dz_k = \sum_{k=1}^n G_k dq_k + \sum_{k=1}^n F_k dp_k \quad (68.14)$$

sia chiusa. Poiché localmente una forma differenziale chiusa è esatta possiamo concludere che esiste una funzione H tale che $\Psi_k = \partial H/\partial z_k$ per $k = 1, \dots, 2n$, i.e. tale che $S_k = \partial H/\partial q_k$ e $R_k = \partial H/\partial p_k$ per $k = 1, \dots, 2n$. ■

p.68.9 **68.9. TEOREMA (POISSON).** *Se F e G sono integrali primi anche $\{F, G\}$ è un integrale primo.*

p.68.10 **68.10. Dimostrazione.** Possiamo applicare il teorema 68.7 e usare il fatto che $dF/dt = dG/dt = 0$. ■

p.68.11 **68.11. DEFINIZIONE (PARENTESI DI POISSON FONDAMENTALI).** *Si definiscono parentesi di Poisson fondamentali le parentesi di Poisson*

$$68.15 \quad \{q_i, q_j\}, \quad \{q_i, p_j\}, \quad \{p_i, p_j\}, \quad (68.15)$$

per $i, j = 1, \dots, n$.

68.12. Osservazione. Possiamo riscrivere le relazioni (68.11) in modo più compatto come

$$\{z_i, z_j\} = E_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2n, \quad (68.16)$$

dove E , al solito, è la matrice simplettica standard.

68.13. Osservazione. Le parentesi di Poisson di due funzioni dipendono dal sistema di coordinate in cui sono scritte. Quando vorremo sottolineare tale dipendenza scriveremo $\{F, G\}_z$, intendendo con tale simbolo

$$\{F, G\}_z = \left\langle \frac{\partial F}{\partial z}(z), E \frac{\partial G}{\partial z}(z) \right\rangle. \quad (68.17)$$

Se quindi consideriamo una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ in generale si ha $\{F, G\}_z \neq \{F, G\}_Z$. Tuttavia vale il seguente risultato.

68.14. TEOREMA. Consideriamo una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(1) La trasformazione è canonica.

(2) Si conservano le parentesi di Poisson, i.e. si ha

$$\{F, G\}_Z = \{F, G\}_z \quad (68.18)$$

per ogni coppia di funzioni $F, G: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

(3) Si conservano le parentesi di Poisson fondamentali (68.2), i.e.

$$\{Q_i, Q_j\}_z = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_z = \delta_{i,j}, \quad \{P_i, P_j\}_z = 0, \quad (68.19)$$

per $i, j = 1, \dots, n$.

68.15. Dimostrazione. Dimostrazioni le implicazioni $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$.

Se la trasformazione $z \rightarrow Z(z, t)$ è canonica allora la matrice $J = \partial Z / \partial z$ è simplettica, e per il Lemma 67.10 anche J^T è simplettica: quindi $JEJ^T = E$. Siano F, G due funzioni di classe C^1 . Si ha allora

$$\begin{aligned} \{F, G\}_z &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial z}, E \frac{\partial G}{\partial z} \right\rangle = \left\langle J^T \frac{\partial F}{\partial Z}, E J^T \frac{\partial G}{\partial Z} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial Z}, JEJ^T \frac{\partial G}{\partial Z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial Z}, E \frac{\partial G}{\partial Z} \right\rangle = \{F, G\}_Z, \end{aligned} \quad (68.20)$$

dove si è usato che $\partial F / \partial z = J^T \partial F / \partial Z$ (cfr. la (67.12)).

L'implicazione $(2) \implies (3)$ è ovvia: basta scegliere come funzioni F, G le coordinate canoniche e utilizzare le identità (68.11).

Supponiamo ora che valgano le (68.19), che possiamo riscrivere (cfr. l'osservazione 68.12) come

$$68.21 \quad \{Z_i, Z_j\}_z = E_{ij} \quad (68.21)$$

Applicando la definizione di parentesi di Poisson troviamo

$$68.22 \quad \begin{aligned} \{Z_i, Z_j\}_z &= \left\langle \frac{\partial Z_i}{\partial z}, E \frac{\partial Z_j}{\partial z} \right\rangle = \sum_{n,m} \frac{\partial Z_i}{\partial z_n} E_{nm} \frac{\partial Z_j}{\partial z_m} \\ &= \sum_{n,m} J_{in} E_{nm} J_{jm} = \sum_{n,m} J_{in} E_{nm} J_{mj}^T = (JEJ^T)_{ij}, \end{aligned} \quad (68.22)$$

che introdotta in (68.21) dà $JEJ^T = E$: quindi J^T è simplettica, e, per il Lemma 67.10, anche la matrice J è simplettica. Da qui segue che la trasformazione $z \rightarrow Z(z, t)$ è canonica. ■

p.68.16 **68.16. Osservazione.** Il teorema 68.14 fornisce un utile criterio pratico per verificare se una data trasformazione di coordinate è canonica. Basta infatti verificare che valgano le relazioni (68.19): si tratta quindi di verificare un numero finito di condizioni. Si vede facilmente che si tratta di $N(2N - 1)$ condizioni (cfr. l'esercizio 7).

sec.69

69. Invariante integrale di Poincaré-Cartan

p.69.1 **69.1. Introduzione.** Richiamiamo alcune nozioni di analisi, in particolare il teorema di Gauss-Green (o della divergenza), e il teorema di Stokes (noto anche come teorema del rotore in $\mathbb{R}^3$).

Data una superficie regolare S di classe C^2 in $\mathbb{R}^N$, determinata dalla condizione $G(x) = 0$, chiameremo *normale* alla superficie S in x il versore

$$69.1 \quad \nu(x) = \frac{\frac{\partial G(x)}{\partial x}}{\left| \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right|}, \quad (69.1)$$

calcolato in $x \in S$. Tale versore sarà per costruzione ortogonale alla superficie. Diremo che un insieme aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^N$ è un *insieme regolare* se la sua frontiera ∂A è una superficie regolare. In tal caso assumeremo che la normale (69.1) sia diretta verso l'esterno di A (e si dirà quindi *normale esterna alla superficie S*).

Data una superficie regolare limitata S , sia γ una curva regolare il cui supporto sia la frontiera ∂S di S . Diremo che γ orienta positivamente ∂S se è percorsa in senso antiorario rispetto alla normale (69.1) alla superficie S . Indicheremo in tal caso con ∂S^+ il cammino orientato individuato da γ su S .

Dato un campo vettoriale $f(x)$ in $\mathbb{R}^3$ chiamiamo *rotore* (o *circuitazione*) di f il campo vettoriale

$$\text{rot } f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right), \quad (69.2)$$

e *divergenza* di f il numero

$$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_k}{\partial x_k}, \quad (69.3)$$

avendo fissato una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ in $\mathbb{R}^3$ e posto $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $f = (f_1, f_2, f_3)$. Notiamo anche che possiamo riscrivere in modo più compatto la (69.2) come

$$\text{rot } f = [\nabla, f] = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}, \quad (69.4)$$

e la (69.3) come

$$\text{div } f = \langle \nabla, f \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, f \right\rangle, \quad (69.5)$$

dove $\nabla = \partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$. Si vede immediatamente che, dato un campo vettoriale f di classe C^2 , si ha $\text{div rot } f = 0$ (cfr. l'esercizio 11).

69.2. TEOREMA (GAUSS-GREENE). Sia $D \subset \mathbb{R}^N$ un insieme regolare e sia $f(x)$ un campo vettoriale di classe C^1 in $\mathbb{R}^N$. Si ha

$$\int_D \text{div } f(x) \, dx = \int_{\partial D} \langle f, \nu \rangle \, d\sigma, \quad (69.6)$$

dove ν indica la normale esterna alla superficie ∂D .

69.3. Osservazione.

69.4. TEOREMA (STOKES). Sia S una superficie regolare di classe C^2 in $\mathbb{R}^3$. Sia $f(x)$ un campo vettoriale di classe C^1 , e siano ω la forma differenziale $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ e $\text{rot } f$ il rotore di f . Si ha

$$\int_S \langle \text{rot } f, \nu \rangle \, d\sigma = \oint_{\partial S^+} \omega, \quad (69.7)$$

dove ν è la normale alla superficie S e ∂S^+ è il cammino individuato da una curva che orienti positivamente ∂S rispetto alla normale ν .

69.5. Dato un campo vettoriale f in $\mathbb{R}^3$, sia $r = \text{rot } f$. Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = r(x)$. Chiamiamo *linee di rotore* le curve integrali (cioè le curve descritte dalle

soluzioni) di tale sistema. Sia γ una curva in $\mathbb{R}^3$: le linee di rotore passanti per γ definiscono una superficie regolare detta *tubo di rotore*.

p.69.6 **69.6. Osservazione.** Sia $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ una forma differenziale di classe C^1 , e sia $\text{rot } f$ il rotore di f . Siano γ_1 e γ_2 due curve in $\mathbb{R}^3$ ottenute tagliando un tubo di rotore del sistema $\dot{x} = r(x)$ con due superfici regolari. Si ha allora

$$69.8 \quad \oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega. \quad (69.8)$$

dove le curve sono percorse nello stesso senso. La (69.8) è una immediata applicazione del teorema 69.2, del teorema 69.4 e della proprietà $\text{div rot } f = 0$ (cfr. l'esercizio 12).

p.69.7 **69.7. Osservazione.** La formula (69.8) è nota come *formula di Stokes* e il risultato è detto *lemma di Stokes* in $\mathbb{R}^3$ (cfr. il Lemma 69.25 più avanti).

p.69.8 **69.8. DEFINIZIONE (SPAZIO DELLE FASI ESTESO).** Dato un sistema hamiltoniano (Σ, H) chiamiamo $\Sigma \times \mathbb{R}$ spazio delle fasi esteso. Possiamo sempre identificare (almeno localmente) Σ con $\mathbb{R}^{2n}$. Indicheremo le coordinate di $\Sigma \times \mathbb{R}$ con $x = (z, t) = (q, p, t)$.

p.69.9 **69.9. Osservazione.** In generale la hamiltoniana è anche funzione del tempo, oltre che delle coordinate canoniche, e quindi è una funzione definita sullo spazio delle fasi esteso.

p.69.10 **69.10.** La nozione di divergenza si estende banalmente a più dimensioni. Se f è un campo vettoriale di classe C^1 in $\mathbb{R}^{2n+1}$ si definisce *divergenza* di f il numero

$$69.9 \quad \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, f \right\rangle. \quad (69.9)$$

Anche la nozione di rotore si può estendere a più dimensioni, così generalizzando a sistemi a più gradi di libertà i risultati discussi nei paragrafi precedenti. Questo richiede però un po' di lavoro.

p.69.11 **69.11.** Dato un campo vettoriale $f \in \mathbb{R}^{2n+1}$ e introdotto un sistema di coordinate $z = (z_1, \dots, z_{2n+1})$, definiamo la matrice antisimmetrica $A \in M(2n+1, \mathbb{R})$ di elementi

$$69.10 \quad A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \quad (69.10)$$

Ricordiamo che si definisce *rango* di una matrice l'ordine massimo dei suoi minori non nulli. Data una matrice A il rango di una matrice si indica con $\text{Ran}(A)$. Poiché una

matrice antisimmetrica di ordine dispari ha determinante nullo (cfr. l'esercizio 13) il rango di una matrice antisimmetrica di ordine $2n + 1$ è al massimo $2n$.

p.69.12 **69.12.** DEFINIZIONE (MATRICE ANTISIMMETRICA NON SINGOLARE). Sia $A \in M(2n+1, \mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Diremo che A è non singolare se $\text{Ran}(A) = 2n$.

p.69.13 **69.13.** Osservazione. Poiché, data una qualsiasi matrice $A \in M(N, \mathbb{R})$ si ha $\text{Ker}(A) + \text{Ran}(A) = N$ (cfr. l'esercizio 14), dove si è indicato con $\text{Ker}(A)$ il nucleo di A (si ricordi la definizione (1.4)), possiamo concludere che il nucleo di una matrice antisimmetrica non singolare A ha dimensione $\text{Ker}(A) = 1$.

p.69.14 **69.14.** DEFINIZIONE (DIREZIONE DI ROTORE). Data una matrice antisimmetrica non singolare A i cui elementi siano della forma (69.10) si definisce direzione di rotore, e si indica con $\text{rot } f$, il sottospazio unidimensionale $\text{Ker}(A)$.

p.69.15 **69.15.** Osservazione. Per $n = 1$ la direzione di rotore coincide con la direzione del vettore (69.2), come è facile verificare. Più precisamente, se poniamo $\text{rot } f = r$ si ha $r = (A_{32}, A_{13}, A_{21})$, e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (69.11)$$

ed è immediato verificare che $r(z)$ genera il nucleo di A , i.e. $Ar = 0$ (cfr. l'esercizio 15).

p.69.16 **69.16.** Osservazione. La matrice (69.11) è la matrice rappresentativa della 2-forma (cfr. il paragrafo §69.18 più avanti)

$$-d\omega = \sum_{i,j=1}^{2n+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j, \quad (69.12)$$

che è (a meno del segno) la *derivata esterna* della forma differenziale (o 1-forma) ω .

p.69.17 **69.17. Forme esterne.** Più in generale si possono considerare k -forme in $\mathbb{R}^N$, o in generale in un qualsiasi spazio vettoriale E . Una k -forma esterna ω è un'applicazione

$$\omega: E \times E \times \dots \times E \rightarrow (\mathbb{R}^N)^* \times \dots \times (\mathbb{R}^N)^* \quad (69.13)$$

multilineare e antisimmetrica, i.e. tale che

$$\omega(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) = (-1)^{\sigma_\pi} \omega(x_1, \dots, x_k), \quad (69.14)$$

dove $\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$ è una qualsiasi permutazione di $\{1, \dots, k\}$ e σ_π è la sua parità. In (69.13) il prodotto cartesiano è fatto k volte.

Si definisce il *prodotto esterno* di una k_1 -forma ω_1 con una k_2 -forma ω_2 come

$$\begin{aligned} & \omega(x_1, \dots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_1+k_2}) \\ 69.15 \quad &= \sum_{\pi \in \Pi} (-1)^{\sigma_\pi} \omega_1(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k_1)}) \omega_2(x_{\pi(k_1+1)}, \dots, x_{\pi(k_1+k_2)}), \end{aligned} \quad (69.15)$$

dove P è l'insieme di tutte le permutazioni $\pi = \{\pi(1), \dots, \pi(k_1), \pi(k_1+1), \dots, \pi(k_1+k_2)\}$ di $\{1, \dots, k_1, k_1+1, k_1+k_2\}$.

Fissato un sistema di coordinate si può scrivere una k -forma ω come

$$69.16 \quad \omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}, \quad (69.16)$$

dove $\{dx_1, \dots, dx_{2n+1}\}$ è la base canonica dello spazio duale di E e $N = \dim(E)$. In (69.16) le k -forme $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ costituiscono quindi una base per lo spazio vettoriale $\Lambda^k(E)$ delle k -forme definite dalla (69.13). Il numero di elementi di tale base, e quindi la dimensione di $\Lambda^k(E)$, è dato dal coefficiente binomiale $N!/k!(N-k)!$

p.69.18 **69.18. Forme differenziali.** Una k -forma differenziale è una k -forma esterna (69.16) con i coefficienti $f_{j_1 \dots j_k}$ che sono funzioni differenziabili di x . Diremo che la forma differenziale (69.16) è di classe C^p se le funzioni $f_{j_1 \dots j_k} = f_{j_1 \dots j_k}(x)$ sono funzioni di classe C^p di x .

Data una k -forma differenziale (69.16) definiamo *derivata esterna* di ω la $(k+1)$ -forma

$$69.17 \quad d\omega = \sum_{j=1}^N \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N} \frac{\partial f_{j_1 \dots j_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}, \quad (69.17)$$

che è ben definita se ω è una k -forma di classe almeno C^1 .

In particolare una 0-forma è semplicemente una funzione differenziabile e una 1-forma è una forma differenziale come definita in (67.1).

Una k -forma differenziale ω si dice *esatta* se esiste una $(k-1)$ -forma ψ tale che $\omega = d\psi$. Una k -forma differenziale ω si dice *chiusa* se $d\omega = 0$. Poiché la derivata esterna gode della proprietà (cfr. l'esercizio 16)

$$69.18 \quad d(d\omega) = 0, \quad (69.18)$$

quale che sia la forma differenziale ω , possiamo concludere che ogni forma differenziale esatta è chiusa. Il viceversa in generale non è vero, però vale il seguente risultato.

p.69.19 **69.19. LEMMA (POINCARÉ).** Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un aperto semplicemente connesso e sia ω una k -forma differenziale in A . Se ω è chiusa allora ω è esatta.

p.69.20 **69.20.** Il lemma di Stokes del paragrafo 69.6 si estende a più dimensioni. Per vederlo occorre prima introdurre la nozione di *varietà differenziabile con bordo*. Iniziamo con

alcuni risultati preliminari. Vale il seguente risultato.

p.69.21 **69.21. TEOREMA (STOKES)** *Sia M una varietà differenziabile orientata con bordo di dimensione $k+1$ in $\mathbb{R}^N$, con $N \geq k+1$, e sia ω una k -forma. Si ha allora*

$$69.19 \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (69.19)$$

dove ∂M è il bordo di M , con l'orientazione derivata da quella di M .

p.69.22 **69.22. Osservazione.** Il teorema di Stokes implica il teorema fondamentale del calcolo integrale (cfr. l'esercizio 17), il teorema 69.2 (cfr. l'esercizio 18) e il teorema (69.4) (cfr. l'esercizio 19). Inoltre il teorema 69.21 implica il lemma di Stokes, che ha la stessa formulazione data nel paragrafo §69.6, ma senza richiedere di essere in $\mathbb{R}^3$.

p.69.23 **69.23. DEFINIZIONE (FORMA DIFFERENZIALE NON SINGOLARE).** *La forma differenziale in $\mathbb{R}^{2n+1}$ data da*

$$69.20 \quad \omega = \sum_{j=1}^{2n+1} f_j(x) dx_j \quad (69.20)$$

si dice non singolare se la matrice A di elementi (69.10) è non singolare.

p.69.24 **69.24. DEFINIZIONE (TUBO DI ROTORE).** *Data una forma differenziale non singolare in $\mathbb{R}^{2n+1}$ si definiscono linee di rotore le curve integrali del campo di direzione di rotore di ω . Data una curva regolare γ si chiama tubo di rotore la superficie generata dalle linee di rotore passanti per γ .*

p.69.25 **69.25. LEMMA (STOKES).** *Sia ω una forma differenziale non singolare, e siano γ_1 e γ_2 le curve ottenute tagliando un tubo di rotore di ω con due superfici regolari. Si ha allora*

$$69.21 \quad \oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega, \quad (69.21)$$

dove le curve sono percorse nello stesso senso.

p.69.26 **69.26. DEFINIZIONE (FORMA DIFFERENZIALE DI POINCARÉ-CARTAN).** *Si definisce forma differenziale di Poincaré-Cartan la forma differenziale*

$$69.22 \quad \langle p, dq \rangle - H dt, \quad (69.22)$$

dove si è posto

$$69.23 \quad \langle p, dq \rangle = \sum_{k=1}^n p_k dq_k, \quad (69.23)$$

per semplicità notazionale.

p.69.27 **69.27. LEMMA.** *La forma differenziale di Poincaré-Cartan è non singolare.*

p.69.28 **69.28. Dimostrazione.** Il campo vettoriale associato alla forma differenziale (69.22), nelle coordinate $(z, t) = (q, p, t)$ dello spazio delle fasi esteso, è

$$69.24 \quad f = (p, 0, -H), \quad (69.24)$$

così che la matrice A , in accordo con la definizione (69.10), è data da (cfr. l'esercizio 20)

$$69.25 \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & \frac{\partial H}{\partial q} \\ -\mathbb{1} & 0 & \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T & -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (69.25)$$

dove 0 e $\mathbb{1}$ sono matrici $n \times n$, mentre $\partial H / \partial q$ e $\partial H / \partial p$ sono matrici $n \times 1$ (cioè vettori). Quindi, in particolare, A ha un minore uguale alla matrice E , e $\det E = 1 \neq 0$. Quindi A ha rango $2n$. ■

p.69.29 **69.29. Osservazione.** Poiché $Ar = 0$, se A è data dalla (69.25) e $r = \text{rot } f$ (i.e. r è un vettore del nucleo di A), si trova subito che, a meno di un fattore moltiplicativo, si ha (cfr. l'esercizio 21)

$$69.26 \quad r = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}, 1 \right), \quad (69.26)$$

e quindi le linee di rotore sono le curve descritte dalle soluzioni delle equazioni

$$69.27 \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{t} = 1. \quad (69.27)$$

Quindi la proiezione delle linee di rotore nel piano (q, p) dà le traiettorie del moto, i.e. le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Possiamo perciò affermare che una quantità che si conserva lungo le linee di rotore è un integrale primo per il sistema hamiltoniano corrispondente.

p.69.30 **69.30. TEOREMA.** *Sia $f = f_H$ un campo vettoriale Hamiltoniano, e siano γ_1 e γ_2 due curve ottenute tagliando un qualsiasi tubo di rotore con due superfici regolari. Si ha allora*

$$69.28 \quad \oint_{\gamma_1} (\langle p, dq \rangle - H dt) = \oint_{\gamma_2} (\langle p, dq \rangle - H dt), \quad (69.28)$$

dove la notazione (69.23) è stata usata.

p.69.31 **69.31. Dimostrazione.** Segue immediatamente dal lemma di Stokes 69.25 utilizzando il fatto che la forma differenziale di Poincaré-Cartan è non singolare. ■

p.69.32 **69.32. Osservazione.** Possiamo enunciare il teorema 69.30 dicendo che il flusso hamiltoniano conserva l'integrale

$$69.29 \quad \oint_{\gamma} (\langle p, dq \rangle - H dt). \quad (69.29)$$

dove l'integrale è calcolato su una qualsiasi curva chiusa γ ottenuta tagliando un tubo di rotore con una superficie regolare.

p.69.33 **69.33. DEFINIZIONE (INVARIANTE INTEGRALE DI POINCARÉ-CARTAN).** Si definisce invariante integrale di Poincaré-Cartan l'integrale (69.29).

p.69.34 **69.34. TEOREMA.** Il flusso hamiltoniano conserva l'integrale

$$69.30 \quad \oint_{\gamma} \langle p, dq \rangle \quad (69.30)$$

dove l'integrale è calcolato su una qualsiasi curva chiusa γ nel piano (q, p) e la notazione (69.23) è stata usata.

p.69.35 **69.35. Dimostrazione.** Segue dal teorema 69.29 prendendo γ sulla superficie ottenuta tagliando un tubo di rotore con un piano $t = \text{cost.}$ ■

p.69.36 **69.36. DEFINIZIONE (INVARIANTE INTEGRALE RELATIVO DI POINCARÉ-CARTAN).** Si definisce invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan l'integrale (69.30), calcolato lungo γ .

sec.70

70. Funzioni generatrici

p.70.1 **70.1. Introduzione.**

p.70.2 **70.2. DEFINIZIONE (DIFFERENZIALE A TEMPO BLOCCATO).** Data una funzione $f(z, t)$, con $z \in \mathbb{R}^N$, di classe C^1 la forma differenziale

$$70.1 \quad \tilde{d}f = df - \frac{\partial f}{\partial t} dt = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, dz \right\rangle = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k. \quad (70.1)$$

è detta differenziale a tempo bloccato di f .

p.70.3 **70.3. Osservazione.** Noi saremo interessati al caso $N = 2n$ e $z = (q, p)$. In tal caso

$$70.2 \quad \tilde{d}f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial q}, dq \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, dp \right\rangle. \quad (70.2)$$

Ovviamente se $f = f(z)$ non dipende esplicitamente dal tempo il differenziale a tempo bloccato di f coincide con il suo differenziale.

p.70.4 **70.4.**

p.70.5 **70.5.** DEFINIZIONE (CONDIZIONE DI LIE). *Data una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ poniamo $z = (q, p)$ e $Z = (P, Q)$. Se esiste una funzione f di classe C^1 tale che*

$$70.3 \quad \langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle = \sum_{k=1}^n (p_k dq_k - P_k dQ_k) = \tilde{d}f, \quad (70.3)$$

diremo che la trasformazione soddisfa la condizione di Lie.

p.70.6 **70.6.** Osservazione. La condizione di Lie equivale a richiedere che la forma differenziale

$$70.4 \quad \langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle \quad (70.4)$$

è un differenziale esatto a tempo bloccato.

p.70.7 **70.7.** TEOREMA. *Una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ è canonica se e solo se vale la condizione di Lie.*

p.70.8 **70.8.** Dimostrazione. Si ha

$$70.5 \quad \langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle = \tilde{d}(\langle p, q \rangle - \langle P, Q \rangle) - \langle q, \tilde{d}p \rangle + \langle Q, \tilde{d}P \rangle, \quad (70.5)$$

così che possiamo riscrivere la (70.4) in modo più simmetrico come

$$\begin{aligned} \langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle &= \frac{1}{2} (\langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle) + \frac{1}{2} (\langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{d}(\langle p, q \rangle - \langle P, Q \rangle) + \frac{1}{2} [(\langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle q, \tilde{d}p \rangle) - (\langle P, \tilde{d}Q \rangle - \langle Q, \tilde{d}P \rangle)] \\ &= \frac{1}{2} \tilde{d}(\langle p, q \rangle - \langle P, Q \rangle) + \frac{1}{2} (\langle Ez, \tilde{d}z \rangle - \langle EZ, \tilde{d}Z \rangle), \end{aligned} \quad (70.6)$$

dove i prodotti scalari dell'ultima riga sono in $\mathbb{R}^{2n}$. In (70.6) la forma differenziale $\tilde{d}(\langle p, q \rangle - \langle P, Q \rangle)$ è un differenziale esatto a tempo bloccato. Si deve quindi dimostrare che esiste una funzione Ψ tale che

$$70.7 \quad \omega \equiv \langle Ez, \tilde{d}z \rangle - \langle EZ, \tilde{d}Z \rangle = \tilde{d}\Psi. \quad (70.7)$$

Possiamo riscrivere la forma differenziale ω come

$$70.8 \quad \omega = \langle Ez, \tilde{d}z \rangle - \langle EZ, J\tilde{d}z \rangle = \langle Ez - J^T EZ, \tilde{d}z \rangle, \quad (70.8)$$

così che, se definiamo

$$70.9 \quad f_k(z) = (Ez - J^T EJ)_k = \sum_{i=1}^{2n} E_{ki} z_i - \sum_{i,j=1}^{2n} J_{ki}^T E_{ij} Z_j, \quad (70.9)$$

la (70.8) diventa

$$70.10 \quad \omega = \sum_{k=1}^{2n} f_k(z) \tilde{d}z_k = \left\langle f(z), \tilde{d}z \right\rangle. \quad (70.10)$$

Quindi ω è (localmente) una forma esatta se e solo se è chiusa. Dobbiamo quindi dimostrare che si ha

$$70.11 \quad \frac{\partial f_k}{\partial z_m} = \frac{\partial f_m}{\partial z_k}, \quad (70.11)$$

ovvero che la matrice M di elementi $M_{km} = \partial f_k / \partial z_m$ è una matrice simmetrica se e solo se la matrice J è симплетtica.

Per calcolo esplicito si trova

$$\begin{aligned} 70.12 \quad \frac{\partial f_k}{\partial z_m} &= \sum_{i=1}^{2n} E_{ki} \frac{\partial z_i}{\partial z_m} - \sum_{i,j=1}^{2n} \left(\frac{\partial J_{ki}^T}{\partial z_m} E_{ij} Z_j + J_{ki}^T E_{ij} \frac{\partial Z_j}{\partial z_m} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} E_{ki} \delta_{i,m} - \sum_{i,j=1}^{2n} \left(\frac{\partial J_{ki}^T}{\partial z_m} E_{ij} Z_j + J_{ki}^T E_{ij} J_{jm} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z_k \partial z_m} E_{ij} Z_j + E_{km} - (J^T EJ)_{km}, \end{aligned} \quad (70.12)$$

e quindi la matrice M è simmetrica se e solo se è simmetrica la matrice $N = E - J^T EJ$. D'altra parte si ha

$$70.13 \quad N^T = (E - J^T EJ)^T = E^T - J^T E^T J = -(E - J^T EJ) = -N, \quad (70.13)$$

quindi si può avere $N^T = N$ se e solo se $N = 0$. Ma $N = 0$ significa $J^T EJ = E$, che è la condizione che deve soddisfare J perché sia симплетtica.

In conclusione si ha $M = M^T$ se e solo se J è симплетtica, e quindi l'asserto è dimostrato. ■

p.70.9 **70.9. LEMMA.** Una trasformazione canonica $z \rightarrow Z(z, t)$ se e solo se conserva l'invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan.

p.70.10 **70.10. Dimostrazione.** Per il teorema 70.7 la trasformazione $z \rightarrow Z(z, t)$ è canonica se e solo se vale la condizione di Lie (70.3). D'altra parte se vale la condizione di Lie,

data una qualsiasi curva chiusa γ nel piano (q, p) (o in un qualsiasi altro piano con $t = \text{cost.}$), si deve avere

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (\langle p, dq \rangle - \langle P(q, p), dQ(q, p) \rangle) &= \oint_{\gamma} (\langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P(q, p), \tilde{d}Q(q, p) \rangle) \\ &= \oint_{\gamma} \tilde{d}f = \oint_{\gamma} df = 0, \end{aligned} \quad (70.14)$$

poiché l'integrale di una forma differenziale lungo una curva chiusa è nullo se e solo se la forma è esatta (cfr. l'esercizio 22). In conclusione si ha

$$\oint_{\gamma} \langle p, dq \rangle = \oint_{\gamma} \langle P(q, p), \tilde{d}Q(q, p) \rangle = \oint_{\Gamma} \langle P, dQ \rangle, \quad (70.15)$$

dove Γ è l'immagine di γ sotto la trasformazione $z \rightarrow Z(z, t)$. Quindi l'invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan è conservato dalla trasformazione se e solo se questa è canonica. ■

70.11. TEOREMA. *Una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ è canonica se e solo se la differenza delle forme differenziali di Poincaré-Cartan è esatta, i.e. se e solo se conserva l'invariante integrale di Poincaré-Cartan.*

70.12. Dimostrazione. Sia γ_1 una curva chiusa in un piano $t = \text{cost.}$, e sia γ_2 una qualsiasi altra curva appartenente al tubo di rotore passante per γ e topologicamente equivalente a γ_1 . Supponiamo che la trasformazione di coordinate sia canonica. Per il teorema 69.30 si ha

$$\oint_{\gamma_1} \langle p, dq \rangle = \oint_{\gamma_2} (\langle p, dq \rangle - H dt). \quad (70.16)$$

Siano Γ_1 e Γ_2 le immagini delle curve γ_1 e γ_2 sotto la trasformazione $z \rightarrow Z(z, t)$. Per il lemma 70.9 si ha

$$\oint_{\gamma_1} \langle p, dq \rangle = \oint_{\Gamma_1} \langle P, dQ \rangle, \quad (70.17)$$

e, di nuovo per il teorema 69.30 si ha

$$\oint_{\Gamma_1} \langle P, dQ \rangle = \oint_{\Gamma_2} (\langle P, dQ \rangle - K dt), \quad (70.18)$$

dove K è la hamiltoniana nelle nuove variabili. Infatti sappiamo per il teorema 67.20 che nelle nuove coordinate le equazioni del moto sono canoniche con hamiltoniana $K(Z) = \hat{H}(Z) + \Psi$ (cfr. l'osservazione 67.22). Quindi possiamo scrivere

$$\oint_{\gamma_2} ((\langle p, dq \rangle - H dt) - (\langle P(q, p), dQ(q, p) \rangle - K(Q(q, p), P(q, p)) dt)) = 0. \quad (70.19)$$

La (70.19) deve valere comunque siano scelte γ_1 e γ_2 (e quindi comunque sia scelta γ_2). Di conseguenza la forma differenziale

$$70.20 \quad (\langle p, dq \rangle - H dt) - (\langle P(q, p), dQ(q, p) \rangle - K(Q(q, p), P(q, p)) dt), \quad (70.20)$$

i.e. la differenza delle forme di Poincaré-Cartan, deve essere un differenziale esatto.

Viceversa supponiamo che la forma differenziale (70.20), per qualche funzione K , sia esatta. Vale allora la (70.19). In particolare se scegliamo la curva γ_2 appartenente a un piano $t = \text{cost.}$ otteniamo

$$70.21 \quad \oint_{\gamma_2} (\langle p, dq \rangle - \langle P(q, p), dQ(q, p) \rangle) = 0. \quad (70.21)$$

così che si conserva l'invariante relativo di Poincaré-Cartan: quindi la trasformazione di coordinate deve essere canonica per il teorema 70.7.

Che K sia proprio la hamiltoniana segue dal fatto che le trasformazioni canoniche conservano la struttura canonica delle equazioni (cfr. il teorema 67.20), quindi le linee di rotore della forma differenziale

$$70.22 \quad \Omega = \langle P(q, p), dQ(q, p) \rangle - K(Q(q, p), P(q, p)) dt \quad (70.22)$$

sono descritte dalle traiettorie del sistema. D'altra parte le linee di rotore non cambiano se modifichiamo la forma differenziale Ω aggiungendo a essa un differenziale totale (cfr. l'esercizio 23). ■

p.70.13 **70.13.** Utilizzando il teorema 70.7 vogliamo descrivere un metodo generale per costruire trasformazioni canoniche.

p.70.14 **70.14. DEFINIZIONE (FUNZIONE GENERATRICE).** Una funzione $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , tale che

$$70.23 \quad \det \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} F(x, y, t) \neq 0, \quad (70.23)$$

è detta funzione generatrice.

p.70.15 **70.15. Procedimento di prima specie.** Si può costruire una trasformazione canonica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ nel modo seguente. Consideriamo allora una funzione generatrice $F(x, y, t)$ e poniamo $x = q$ e $y = Q$. Definiamo

$$70.24 \quad p = \frac{\partial}{\partial q} F(q, Q, t), \quad P = -\frac{\partial}{\partial Q} F(q, Q, t). \quad (70.24)$$

In virtù della condizione (70.23) abbiamo che la matrice di elementi

$$70.25 \quad \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial Q_j} F(q, Q, t) \quad (70.25)$$

è non singolare, quindi, applicando il teorema della funzione implicita, possiamo invertire la prima relazione in (70.24) ed esprimere Q in funzione di (q, p) , i.e. $Q = Q(q, p, t)$. Introdotta questa nella seconda di (70.24) troviamo anche P in funzione di (q, p) , i.e. $P = P(q, p, t)$. Abbiamo quindi ottenuto una trasformazione di coordinate $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ (dipendente se F dipende esplicitamente dal tempo). Tale trasformazione è canonica. Infatti risulta

$$70.26 \quad \langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial q}, \tilde{d}q \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q}, \tilde{d}Q \right\rangle = \tilde{d}F, \quad (70.26)$$

e quindi la condizione di Lie (70.3) è soddisfatta.

Possiamo anche calcolare la nuova Hamiltoniana $K(Q, P, t)$. Se la funzione F non dipende dal tempo allora anche la trasformazione di coordinate è indipendente dal tempo, e quindi è una trasformazione simplettica: in particolare si ha $K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t)$. Se invece la funzione F dipende esplicitamente dal tempo allora si ha, utilizzando come coordinate indipendenti (q, Q, t) ,

$$70.27 \quad \langle p, dq \rangle - H dt - \langle P, dQ \rangle = \tilde{d}F - H dt = dF - \frac{\partial F}{\partial t} dt - H dt, \quad (70.27)$$

quindi poiché la differenza delle forme di Poincaré-Cartan $\omega = \langle p, dq \rangle - H dt$ e $\Omega = \langle P, dQ \rangle - K dt$ deve essere un differenziale esatto (come conseguenza del teorema 70.11; cfr. l'esercizio 24), si trova che si deve avere

$$70.28 \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (70.28)$$

ovvero

$$70.29 \quad K(Z, t) = H(z(Z, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q(Z, t), Q, t), \quad (70.29)$$

dove la derivata parziale va calcolata a q, Q costanti (e solo dopo si esplicita q in funzione di (Q, P, t)).

p.70.16 **70.16. DEFINIZIONE (FUNZIONE GENERATRICE DI PRIMA SPECIE).** Una funzione generatrice $F(x, y, t)$ si dice funzione generatrice di prima specie se viene utilizzata per costruire una trasformazione canonica mediante un procedimento di prima specie.

p.70.17 **70.17. Procedimento di seconda specie.** Si può anche costruire una trasformazione canonica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ nel modo seguente. Consideriamo una funzione generatrice $F(x, y, t)$ e poniamo $x = q$ e $y = P$. Definiamo

$$70.30 \quad p = \frac{\partial}{\partial q} F(q, P, t), \quad Q = \frac{\partial}{\partial P} F(q, P, t). \quad (70.30)$$

Di nuovo, per la condizione (70.23), la matrice di elementi

$$70.31 \quad \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial P_j} F(q, P, t) \quad (70.31)$$

è non singolare, quindi per il teorema della funzione implicita, possiamo invertire la prima relazione in (70.30) ed esprimere P in funzione di (q, p) , i.e. $P = P(q, p, t)$. Introdotta questa nella seconda di (70.30) troviamo anche Q in funzione di (q, p) , i.e. $Q = Q(q, p, t)$. Risulta

$$70.32 \quad \langle p, \tilde{d}q \rangle - \langle P, \tilde{d}Q \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial q}, \tilde{d}q \right\rangle - \tilde{d} \langle P, Q \rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial P}, \tilde{d}P \right\rangle = \tilde{d}\Psi, \quad (70.32)$$

avendo definito

$$70.33 \quad \Psi = F - \langle P, Q \rangle. \quad (70.33)$$

La condizione di Lie (70.3) è quindi soddisfatta: di conseguenza la trasformazione è canonica.

Anche in questo caso possiamo calcolare la nuova Hamiltoniana $K(Q, P, t)$. Per prima cosa si scrive $\langle p, dq \rangle - \langle P, dQ \rangle = -d \langle P, Q \rangle + \langle p, dq \rangle + \langle Q, dP \rangle = \tilde{d}F - d \langle P, Q \rangle$. Ragionando come prima troviamo quindi

$$70.34 \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (70.34)$$

che si riduce a $K = H$ nel caso di trasformazioni indipendenti dal tempo. In questo caso la derivata parziale va fatta a (q, P) costanti, e dopo averla calcolata si esplicita $q = q(Q, P, t)$.

p.70.18 **70.18. DEFINIZIONE (FUNZIONE GENERATRICE DI SECONDA SPECIE).** *Una funzione generatrice $F(x, y, t)$ si dice funzione generatrice di seconda specie se viene utilizzata per costruire una trasformazione canonica mediante un procedimento di seconda specie.*

p.70.19 **70.19. Osservazione.** Si possono considerare anche procedimenti di terza specie o di quarta specie scegliendo una funzione generatrice $F(x, y, t)$ e ponendo $x = p$ e $y = Q$, o $x = p$ e $y = P$, rispettivamente. In corrispondenza si pone

$$70.35 \quad q = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad (70.35)$$

per le trasformazioni di terza specie, e

$$70.36 \quad q = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P}, \quad (70.36)$$

per le trasformazioni di quarta specie. Più in generale si possono considerare trasformazioni ottenute ponendo nella funzione generatrice $F(x, y, t)$ alcune x_i uguali a q_i , altre x_i uguali a p_i , e allo stesso modo, alcune y_i uguali a Q_i , altre P_i . Si possono considerare quindi vari procedimenti per costruire trasformazioni canoniche. Le funzioni generatrici di seconda specie sono tuttavia particolarmente importanti per due

motivi fondamentali. In primo luogo la trasformazione identità si ottiene attraverso un procedimento di seconda specie. Inoltre dato un qualsiasi cambiamento di coordinate $q \rightarrow Q(q, t)$ è sempre possibile costruire una trasformazione canonica utilizzando un procedimento di seconda specie. Valgono infatti i seguenti risultati.

p.70.20 **70.20. TEOREMA.** *La trasformazione identità si ottiene unicamente da una funzione generatrice di seconda specie.*

p.70.21 **70.21. Dimostrazione.** Si può costruire la trasformazione identità $z \rightarrow Z(z) = z$ attraverso un procedimento di seconda specie prendendo come funzione generatrice la funzione

$$70.37 \quad F(x, y) = \langle x, y \rangle \quad (70.37)$$

e ponendo $x = q$ e $y = P$. Si ottiene allora, dalle (70.30), $p = P$ e $Q = q$, i.e. $Z = z$.

Dimostriamo ora che non si può ottenere la trasformazione identità con una funzione generatrice di specie diversa. Se fosse possibile si avrebbe per qualche k uno dei tre casi seguenti: $(x_k, y_k) = (q_k, Q_k)$ oppure $(x_k, y_k) = (p_k, Q_k)$ oppure $(x_k, y_k) = (p_k, P_k)$. Quindi, imponendo $q_k = Q_k$ e $p_k = P_k$, si avrebbe, corrispondentemente, $\partial F / \partial x_k = -\partial F / \partial y_k$ oppure $x_k = \partial F / \partial y_k$ oppure $y_k = \partial F / \partial x_k$. Ma tali condizioni non sono compatibili con il fatto che (x, y) costituisca un insieme di $2n$ variabili indipendenti. ■

p.70.22 **70.22. Osservazione.** Il teorema 70.20 è di grande importanza alla luce della seguente osservazione. Supponiamo di avere un sistema hamiltoniano di cui si sappiano calcolare le soluzioni, e consideriamo il sistema ottenuto come perturbazione di quello dato. Analiticamente significa che se il sistema dato è descritto da una hamiltoniana H il sistema perturbato è descritto da una hamiltoniana $H + \varepsilon H_1$, con ε parametro reale molto piccolo (in qualche senso). Tale parametro prende il nome di *parametro perturbativo*. Ci si può chiedere allora se esiste una trasformazione canonica che porti le soluzioni del sistema perturbato nelle soluzioni del sistema imperturbato. Se questo è possibile mediante una trasformazione canonica che sia almeno continua in ε , allora tale trasformazione deve necessariamente essere vicina all'identità, i.e. deve risuoi all'identità per $\varepsilon \rightarrow 0$. La corrispondente funzione generatrice sarà allora della forma $\langle x, y \rangle + F(x, y, \varepsilon)$, con $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, y, \varepsilon) = 0$.

p.70.23 **70.23. TEOREMA.** *Ogni trasformazione di coordinate $q \rightarrow Q(q)$ si può estendere in modo unico a una trasformazione canonica dello spazio delle fasi.*

p.70.24 **70.24. Dimostrazione.** Consideriamo una trasformazione di coordinate $q \rightarrow Q = \Phi(q)$. Consideriamo allora la funzione generatrice

$$70.38 \quad F(x, y) = \langle y, \Phi(x) \rangle \quad (70.38)$$

e utilizziamola per un procedimento di seconda specie ponendo $x = q$ e $y = P$. Quindi

F diventa $F = \langle P, \Phi(q) \rangle$. Troviamo quindi

$$70.39 \quad \begin{cases} Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \Phi(q), \\ p = \frac{\partial F}{\partial Q} = \left\langle P, \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right\rangle = I^T P, \end{cases} \quad (70.39)$$

dove $I = \partial \Phi(q) / \partial q$ è la matrice jacobiana della trasformazione $q \rightarrow \Phi(q)$. Quindi possiamo riscrivere la (70.39) come

$$70.40 \quad \begin{cases} Q = \Phi(q), \\ P = (I^T)^{-1} p, \end{cases} \quad (70.40)$$

che estende la trasformazione data a una trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. ■

p.70.25 **70.25. Osservazione.** Notiamo che la trasformazione dei momenti coniugati in (70.40) è una trasformazione lineare.

p.70.26 **70.26. Osservazione.** Se la trasformazione $q \rightarrow \Phi(q)$ è lineare, i.e. $\Phi(q) = Aq$, allora si ha $I = A$, e la (70.40) diventa

$$70.41 \quad Q = Aq, \quad P = (A^T)^{-1} p. \quad (70.41)$$

In particolare se A è una matrice ortogonale (i.e. sel la trasformazione $q \rightarrow \Phi(q)$ descrive una rotazione), allora $A^T = A^{-1}$ e la (70.41) dà

$$70.42 \quad Q = Aq, \quad P = Ap, \quad (70.42)$$

i.e. coordinate e momenti si trasformano secondo la setssa legge.

p.70.27 **70.27. TEOREMA.** *Il flusso hamiltoniano definisce una trasformazione canonica.*

p.70.28 **70.28. Dimostrazione.** Indichiamo con $z(t) = (q(t), p(t))$ la soluzione delle equazioni di Hamilton con condizioni iniziali $z(0) = (q(0), p(0)) \equiv (Q, P)$. Dimostriamo allora che la trasformazione $(Q, P) \rightarrow (q(t), p(t))$ è una trasformazione canonica (ovviamente dipendente dal tempo). Faremo vedere che vale la condizione di Lie (70.3) con

$$70.43 \quad f(Q, P, t) = \int_0^t d\tau \left(p \frac{dq}{d\tau} - H \right), \quad (70.43)$$

dove $H = (q(\tau), p(\tau), \tau)$. Si noti che, se consideriamo $z(t)$ come funzione di Z e t , poiché Z non dipende dal tempo, si ha $dz/dt = \partial z / \partial t$.

Richiedere la (70.3) significa quindi richiedere che sia

$$70.44 \quad \frac{\partial f}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} - P_k, \quad \frac{\partial f}{\partial P_k} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k}. \quad (70.44)$$

A partire dalla definizione (70.43) di f e utilizzando che $(q(t), p(t))$ risolvono le equazioni del moto, i.e. $\dot{q} = \partial H / \partial p$ e $\dot{p} = -\partial H / \partial q$, si verifica immediatamente che le (70.44) sono soddisfatte. ■

p.70.29 **70.29. Osservazione.** La funzione integranda in (70.43) non è altro che la lagrangiana. Quindi la funzione f è l'azione del sistema.

p.70.30 **70.30. Osservazione.**

p.70.31 **70.31. TEOREMA.** Una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z)$, indipendente dal tempo, è canonica se e solo se risulta

$$70.45 \quad \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq_k = \sum_{k=1}^n dP_k \wedge dQ_k. \quad (70.45)$$

p.70.32 **70.32. Dimostrazione.** poiché stiamo considerando trasformazioni di coordinate indipendenti dal tempo, la condizione di Lie richiede che si abbia

$$70.46 \quad \sum_{k=1}^n p_k dq_k - \sum_{k=1}^n P_k dQ_k = df, \quad (70.46)$$

per qualche funzione f . Applicando la derivata esterna a entrambi i membri, utilizzando la proprietà (69.18) e la definizione (69.17), otteniamo quindi la (70.45). ■

p.70.33 **70.33. Definizione (Forma simplettica).** La 2-forma $\omega = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq_k$ prende il nome di forma simplettica.

p.70.34 **70.34. Osservazione.** Possiamo enunciare il teorema 70.31 dicendo che una trasformazione è canonica se e solo se conserva la forma simplettica.

Esercizi

Esercizio 1. Dare un esempio di una forma chiusa che non sia esatta.

Esercizio 2.

Esercizio 3. Dimostrare che la matrice simplettica standard E , definita in (65.12), ha determinante $\det E = 1$.

Esercizio 4. Dimostrare che l'insieme delle matrici simplettiche forma un gruppo.

Esercizio 5.

Esercizio 6. Dimostrare la relazione (68.3).

Esercizio 7. Dimostrare che le (68.19) costituiscono un insieme di $N(2N - 1)$ condizioni indipendenti. [Soluzione. Le condizioni $\{Q_i, P_j\} = \delta_{i,j}$ sono N^2 condizioni, mentre, utilizzando il fatto che

168 CAPITOLO 17. TRASFORMAZIONI CANONICHE

le parentesi di Poisson sono antisimmetriche, si vede che le condizioni $\{Q_i, Q_j\} = 0$ sono $N(N-1)/2$, e lo stesso vale per le condizioni $\{P_i, P_j\} = 0$.]

Esercizio 8. Dire se la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = q\sqrt{1+p^2q^2}, \\ P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2q^2}}, \end{cases}$$

è симпlettica.

Esercizio 9. Dire se la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = p_2, \\ Q_2 = 3p_1 + 2p_2, \\ P_1 = -q_2 + \frac{2}{3}q_1, \\ P_2 = -\frac{1}{3}q_1, \end{cases}$$

è симпlettica.

Esercizio 10.

Esercizio 11. Dimostrare che, dato un campo vettoriale f di classe C^2 , in $\mathbb{R}^3$ si ha $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$.

Esercizio 12. Dimostrare la formula di Stokes (69.8).

Esercizio 13. Dimostrare che il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine dispari è nullo. [*Suggerimento.* Data una matrice $A \in M(N, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\det(\lambda A) = \lambda^N \det A$. Se A è antisimmetrica si ha $A^T = -A$, quindi $\det A = \det(-A) = (-1)^N \det A$. Se quindi $N = 2n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$, si trova $\det A = -\det A$.]

Esercizio 14. Dimostrare che data una matrice $A \in M(N, \mathbb{R})$, se $\operatorname{Ker}(A)$ indica il nucleo di A e $\operatorname{Ran}(A)$ indica il suo rango, si ha $\operatorname{Ker}(A) + \operatorname{Ran}(A) = N$. [*Suggerimento.* Alla luce della proposizione 1.19 basta dimostrare che $\operatorname{Ran}(A) = \operatorname{Im}(A)$.]

Esercizio 15. Dimostrare che, data la matrice A di elementi 69.10 e posto $r = \operatorname{rot} \varphi$, si ha $Ar = 0$, i.e. r è autovettore di A associato all'autovalore $\lambda = 0$. [*Suggerimento.* La matrice antisimmetrica A si può scrivere in termini di r in accordo con la (69.11). Si vede allora che $Az = [r, z]$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Quindi $Ar = [r, r] = 0$.]

Esercizio 16. Dimostrare la proprietà (69.18). [*Suggerimento.* Segue dalla definizione (69.17) di derivata esterna e dal fatto che la forma differenziale è un'applicazione antisimmetrica.]

Esercizio 17. Dimostrare che il teorema 69.21 implica il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Esercizio 18. Dimostrare che il teorema 69.21 implica il teorema 69.2 (teorema della divergenza).

Esercizio 19. Dimostrare che il teorema 69.21 implica il teorema 69.4 (teorema del rotore o teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$).

Esercizio 20. Dimostrare la (69.25).

Esercizio 21. Dimostrare che, definiti la matrice A e il vettore r in accordo con la (69.25) e con la (69.26), rispettivamente, si ha $Ar = 0$.

Esercizio 22. Dimostrare che l'integrale di una forma differenziale lungo una curva chiusa è nullo

se e solo se la forma è esatta.

Esercizio 23. Dimostrare che le linee di rotore di una campo vettoriale f non cambiano se aggiungiamo alla corrispondente forma differenziale un differenziale totale.

Esercizio 24. Dimostrare che il teorema 70.11 implica che, data una trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ e posto

$$\omega = \langle p, dq \rangle - H dt, \quad \Omega = \langle P, dQ \rangle - K dt,$$

la forma differenziale $\omega - \Omega$ è un differenziale esatto se e solo se la trasformazione di coordinate è canonica (e in tal caso K è la forma che la hamiltoniana H assume nel sistema di coordinate Z).

Esercizio 25. Si dimostri che la trasformazione

$$\begin{cases} p = 2e^t \sqrt{PQ} \log P, \\ q = e^{-t} \sqrt{PQ}, \end{cases}$$

è canonica, e se ne trovi la funzione generatrice di seconda specie. Si studi come si trasforma la hamiltoniana $H(p, q) = pq$. [Soluzione. La trasformazione è definita da $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Una funzione generatrice di seconda specie è $F(q, P, t) = q^2 e^{2t}/P$. Si noti che $\partial^2 F / \partial q \partial P = -2q e^{2t}/P^2 \neq 0$, poiché $q > 0, P > 0$. La nuova Hamiltoniana è

$$K(P, Q, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q(Q, P, t), P, t) = 2PQ \log P + 2PQ \log P = 4PQ \log P,$$

quindi non dipende dal tempo.]

Esercizio 26. Si consideri la trasformazione

$$\begin{cases} Q = q^2 + qp(t+1), \\ P = \sin q + f(q, t), \end{cases}$$

dove $f(q, t)$ è una funzione di classe C^2 in qualche dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Verificare che è possibile determinare la funzione $f(q, t)$ e il dominio $\mathcal{D}$ in modo tale che la trasformazione sia canonica. Si trovi una funzione generatrice. [Soluzione. Si ha $f(q, t) = -\sin q - (t+1)^{-1} \log q$, con $\mathcal{D} = \{(q, t) \in \mathbb{R}^2 : q > 0, t > -1\}$. Poiché P è funzione della sola q (oltre che del tempo t), non possiamo considerare q, P variabili indipendenti, quindi non si potrà cercare una funzione generatrice di seconda specie. Si potrà invece cercare una funzione generatrice, per esempio, con un procedimento di prima specie, cioè nella forma $F(q, Q, t)$. Si trova in tal caso $F(q, Q, t) = (t+1)^{-1}(Q \log q - q^2/2)$.]

Esercizio 27. Si consideri la hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8} (p_1 + p_2)^2 + \frac{1}{4} \frac{(p_1 - p_2)^2}{(q_1 + q_2)^2} + \frac{k}{2} \frac{(q_1 - q_2)^2}{(q_1 + q_2)^2} + h (q_1 + q_2)^2,$$

con $k, h > 0$. Determinare la trasformazione simplettica $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2, \quad Q_2 = q_1 - q_2.$$

e determinare la hamiltoniana nelle nuove coordinate.

Esercizio 28. Dimostrare che la trasformazione di coordinate $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, definita da

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\frac{Q_1}{2P_1}}, \\ q_2 = \sqrt{\frac{Q_2}{2P_2} - \frac{1}{2P_2} \sqrt{\frac{Q_1}{2P_1}}}, \\ p_1 = P_2 + 2P_1^2 \sqrt{\frac{Q_1}{2P_1}}, \\ p_2 = 2P_2^2 \sqrt{\frac{Q_2}{2P_2} - \frac{1}{2P_2} \sqrt{\frac{Q_1}{2P_1}}}, \end{cases}$$

170 CAPITOLO 17. TRASFORMAZIONI CANONICHE

è una trasformazione simplettica.

Esercizio 29. Data la trasformazione

$$\begin{cases} P = -2\sqrt{p} \sin q, \\ Q = \sqrt{p} \cos q, \end{cases}$$

dimostrare che è simplettica. Se $H(p, q) = -p \sin 2q$ è la hamiltoniana nel sistema di coordinate (p, q) determinare la hamiltoniana $K(P, Q)$ nel sistema di coordinate (P, Q) . Trovare la soluzione con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (\pi/4, 1)$. Trovare la funzione generatrice di seconda specie della trasformazione.

Esercizio 30. Si consideri il sistema descritto dalla hamiltoniana

$$\mathcal{H} = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{8} \lambda_1^2 (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{8} \lambda_2^2 (q_1 + q_2)^2.$$

Dimostrare che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}} \cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_1}} \cos P_2, \\ q_2 = -\sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}} \cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_1}} \cos P_2, \\ p_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2Q_1 \lambda_1} \sin P_1 + \frac{1}{2} \sqrt{2Q_2 \lambda_2} \sin P_2, \\ p_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{2Q_1 \lambda_1} \sin P_1 + \frac{1}{2} \sqrt{2Q_2 \lambda_2} \sin P_2, \end{cases}$$

è simplettica, e determinare la hamiltoniana nelle nuove coordinate. Trovare esplicitamente la soluzione delle equazioni di Hamilton.

Esercizio 31. Si consideri la trasformazione

$$\begin{cases} p = ae^{\alpha P(1+\beta Q)} - 1, \\ q = b \log(1 + \beta Q) e^{-\alpha P(1+\beta Q)}, \end{cases}$$

con a, b, α, β parametri reali. Si determinino l'insieme dei parametri per cui è invertibile, e l'insieme dei parametri per cui è simplettica.

Esercizio 32. Data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} P = -q - \sqrt{p + q^2}, \\ Q = -q^2 - aq\sqrt{p + q^2}, \end{cases}$$

con a parametro reale, individuarne il dominio di definizione e trovare per quali valori di a è simplettica. [Soluzione. Il dominio è l'insieme $D = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p \geq -q^2\}$. la trasformazione è simplettica per $a = 2$.]

Esercizio 33. Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = f(q, p), \\ P = p^\alpha. \end{cases}$$

Determinare se possibile la funzione $f(q, p)$ in modo tale che la trasformazione sia simplettica. [Soluzione. Deve essere $\alpha = 1$ e $f(q, p) = q + g(p)$, con g funzione arbitraria (regolare).]

Esercizio 34. Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{q}{p}, \\ P = f(q, p). \end{cases}$$

Determinare se possibile la funzione $f(q, p)$ in modo tale che la trasformazione sia simplettica. [Soluzione. Imponendo $\{Q, P\} = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{q}{p^2} \frac{\partial f}{\partial q} = 1.$$

Se si cerca una soluzione nella forma $f(q, p) = \gamma q^\alpha p^\beta$ si trova $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $\gamma = 1/2$. Quindi $f(q, p) = p^2/2$.]

Esercizio 35. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q}, \\ P = -\frac{4q^2}{3p}, \end{cases}$$

è simplettica, e si usi tale risultato per determinare il moto descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = q\dot{q}^2$. [Soluzione. Si ha $q(t) = (q_0^{3/2} + 3q_0 v_0^{1/2} t/2)^{2/3}$, dove $(q(0), \dot{q}(0)) = (q_0, v_0)$.]

Esercizio 36. Data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q = e^{-t} (PQ)^\alpha, \\ p = 2e^t (PQ)^\gamma \log p^\beta, \end{cases}$$

determinare per quali valori dei parametri reali α , β e γ la trasformazione è canonica. Nel caso $\alpha = 1/2$ dire come si trasforma la hamiltoniana $H = -qp$.

Esercizio 37.

Esercizio 38.

Esercizio 39.

Esercizio 40. Data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \log \left(\frac{1}{q} e^{\alpha p} \right), \\ P = \beta q e^{\gamma p}, \end{cases}$$

dire per quali valori dei parametri reali α , β e γ è simplettica, e trovarne in tal caso una funzione generatrice. [Soluzione. Si deve avere $\gamma = 0$ e $\alpha\beta = -1$. Una funzione generatrice di prima specie è data da $F(q, Q) = q(Q + \log q - 1)/\alpha$; si noti che $\partial^2 F / \partial q \partial Q = 1/\alpha \neq 0$.]

