

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (14-01-2008)

ESERCIZIO 1. [6] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = x + y + z, \end{cases}$$

e se ne calcoli la soluzione con dato iniziale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$.

ESERCIZIO 2. [5] Enunciare e dimostrare il lemma di Gronwall.

ESERCIZIO 3. [8]

(3.1) [4] Discutere il metodo di variazione delle costanti nella soluzione di equazioni differenziali lineari non omogenee.

(3.2) [4] Utilizzare il risultato per risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + t, \\ \dot{y} = x + t, \end{cases}$$

con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.

ESERCIZIO 4. [13] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x^2 + y^2 - 1)x - y, \\ \dot{y} = -(x^2 + y^2 - 1)y + x. \end{cases}$$

(4.1) [1] Si determinino i punti d'equilibrio del sistema.

(4.2) [1] Se ne discuta la stabilità.

(4.3) [1] Si dimostri che il cerchio γ di equazione $x^2 + y^2 = 1$ è invariante.

(4.4) [2] Si dimostri che il cerchio γ costituisce un ciclo limite per il sistema.

(4.5) [3] Si determini l'insieme dei dati iniziali che sono attratti da γ .

(4.6) [5] Si determini analiticamente la soluzione del sistema al variare dei dati iniziali (x_0, y_0) nel piano. [Suggerimento. Si consiglia di passare a coordinate polari.]

ESERCIZIO 5. [5] Descrivere brevemente in cosa consista il problema dei due corpi, e discutere in dettaglio la conservazione del momento angolare.

ESERCIZIO 6. [5] Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens-Steiner, facendo attenzione a definire tutte le quantità coinvolte.