

CORREZIONE

ESERCIZIO 1. Nel sistema di riferimento mobile un osservatore che occupi la posizione $\mathbf{Q}$ risente sia della forza esterna che agisce sul sistema sia delle forze apparenti. Si ha infatti

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3,$$

dove $\mathbf{F}_1 = -m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{Q}]$ è la forza d'inerziale di rotazione, $\mathbf{F}_2 = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ è la forza di Coriolis e $\mathbf{F}_3 = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ la forza centrifuga. Cfr. Cap. 8, §34, teorema 34.6 e paragrafo 34.7 per la dimostrazione.

Se il sistema mobile ruota con velocità angolare costante (cioè la rotazione del sistema è la rotazione intorno a un asse fisso con velocità di rotazione costante) si ha $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$, e se l'osservatore è fermo in tale sistema di riferimento si ha anche $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$. Sotto tali condizioni le forze apparenti si riducono alla sola forza centrifuga $\mathbf{F}_3$.

La forza centrifuga si annullerà anch'essa qualora risulti $[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = \mathbf{0}$, ovvero il vettore $\mathbf{Q}$ sia parallelo al vettore $\boldsymbol{\Omega}$. Fisicamente questo significa che l'osservatore si trova lungo l'asse fisso di rotazione.

ESERCIZIO 2. Cfr. Cap. 4, §18, paragrafi 18.20 e 18.21.

ESERCIZIO 3.

3.1. Per il sistema (A) si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^3, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

così che $(x, y) = (0, 0)$ rappresenta un punto d'equilibrio. Consideriamo la funzione $W(x, y) = H(x, y)$. Si ha $W(0, 0) = 0$ e $W(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, e inoltre

$$\dot{W} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = 4xy^3 - 4y^3x = 0,$$

quindi possiamo applicare il teorema di Ljapunov prendendo $W(x, y)$ come funzione di Ljapunov, e concludere che $(0, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile.

3.2. Il sistema (A) ammette una costante del moto $H(x, y)$ di classe C^1 che ha punti stazionari isolati (ovvero che non è identicamente costante su alcun aperto di $\mathbb{R}^2$).

Esiste un teorema che afferma che sotto tali condizioni il sistema non può avere né punti d'equilibrio asintoticamente stabile né cicli limiti. Nel caso dei punti d'equilibrio (che è il caso che a noi interessa) la dimostrazione è la seguente. Supponiamo per assurdo che esista un punto d'equilibrio asintoticamente stabile $z_0 = (x_0, y_0)$. Allora z_0 è attrattivo e quindi esiste un intorno $B(z_0)$ del punto tale che per ogni $z \in B(z_0)$ la traiettoria $\varphi(t, z)$ tende a z_0 per $t \rightarrow \infty$. Poiché H è continua si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} H(\varphi(t, z)) = H(z_0)$, e poiché H è una costante del moto si ha $H(z) = H(\varphi(t, z))$, e quindi si trova $H(z) = H(z_0)$ per ogni $z \in B(z_0)$. Ma allora H sarebbe identicamente costante in $B(z_0)$, contro l'ipotesi.

Quindi l'origine non può essere un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

3.3. Per il sistema (B) si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -4y^3, \end{cases}$$

così che $(x, y) = (0, 0)$ rappresenta nuovamente un punto d'equilibrio. Il sistema considerato è un sistema gradiente. Il punto $(0, 0)$ è un punto di minimo isolato per $H(x, y)$, quindi è un punto d'equilibrio asintoticamente

stabile. Questo segue sempre dal teorema di Ljapunov, prendendo come funzione di Ljapunov $W(x, y) = H(x, y)$, e notando che $W(0, 0) = 0$ e $W(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, e

$$\dot{W} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = -x^2 - 16y^4,$$

così che $\dot{W} \leq 0$ e $\dot{W} = 0$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$.

3.4. Per ogni $E > 0$ consideriamo la curva di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = E\}.$$

Tale curva è una curva chiusa regolare che contiene l'origine al suo interno. Inoltre, se A denota la regione racchiusa da Γ_E , l'insieme $\bar{A}$ è positivamente invariante. Infatti, in un sistema gradiente $\dot{z} = g(z) = -\nabla H(z)$, le traiettorie sono ortogonali alle curve di livello della funzione H , e attraversano la curva di livello Γ_E entrando nella regione A poiché $\dot{H} = -|\nabla H|^2 \leq 0$, e H diminuisce avvicinandosi all'origine. Inoltre $\dot{H}(z) = 0$ se e solo se $z = 0$, e $\dot{H}(z) < 0$ per ogni $z \neq 0$ (cfr. il punto 3.3). Quindi l'insieme $\bar{A} \setminus \{0\}$ non contiene traiettorie in cui $\dot{H} = 0$ identicamente. Sono quindi soddisfatte le ipotesi sotto le quali possiamo applicare il teorema di Barbašin-Krasovskij, il cui enunciato è il seguente.

Sia x_0 un punto d'equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x)$. Supponiamo che esista una funzione $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un intorno $B(x_0)$ di x_0 e di classe C^1 , tale che

(1) $W(x_0) = 0$, e $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$;

(2) $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$.

(3) Supponiamo anche che esista un insieme compatto P , chiusura di un aperto, tale che: (3.1) $x_0 \in P$, (3.2) P è positivamente invariante, e (3.3) non esistono in $P \setminus \{x_0\}$ traiettorie costituite unicamente da punti z in cui $\dot{W}(z) = 0$.

Allora x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e P è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

Poiché $E \geq 0$ può essere scelto arbitrariamente, possiamo concludere che tutto il piano costituisce il bacino d'attrazione dell'origine: quindi l'origine è un punto attrattivo globale.

ESERCIZIO 4.

4.1. Grafico dell'energia potenziale. Data l'energia potenziale

$$V(x) = \frac{\alpha}{2n} x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

si ha

$$\begin{aligned} V'(x) &= \alpha x^{2n-1}, \\ V''(x) &= \alpha(2n-1)x^{2n-2}, \end{aligned}$$

così che per $\alpha \neq 0$ si ha $V'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Inoltre, per $\alpha \neq 0$, la derivata seconda $V''(x)$ si annulla solo per $x = 0$ se $n \geq 2$ mentre non si annulla mai per $n = 1$. Quindi per $n = 1$ $V''(x) > 0$ per $\alpha > 0$ e $V''(x) < 0$ per $\alpha < 0$, mentre per $n \geq 2$ si ha $V''(0) = 0$ e, per $x \neq 0$, si ha $V''(x) > 0$ per $\alpha > 0$ e $V''(x) < 0$ per $\alpha < 0$.

Il caso $\alpha = 0$ va discusso a parte perché in tal caso l'energia potenziale è identicamente nulla.

Quindi la funzione $V(x)$ è convessa per $\alpha > 0$ ed è concava per $\alpha < 0$. In particolare $x = 0$ è un punto di minimo (isolato) per $\alpha > 0$ e un punto di massimo per $\alpha < 0$.

Inoltre $V(x)$ è pari, e si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \infty$ per $\alpha > 0$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = -\infty$ per $\alpha < 0$.

Il grafico dell'energia potenziale è quindi come rappresentato in Figura 1 per $\alpha > 0$ e come rappresentato in Figura 2 per $\alpha < 0$. Per $\alpha = 0$ si ha banalmente $V(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4.2. Punti d'equilibrio. Il sistema dinamico associato al sistema meccanico unidimensionale dato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x) = -\alpha x^{2n-1}, \end{cases}$$

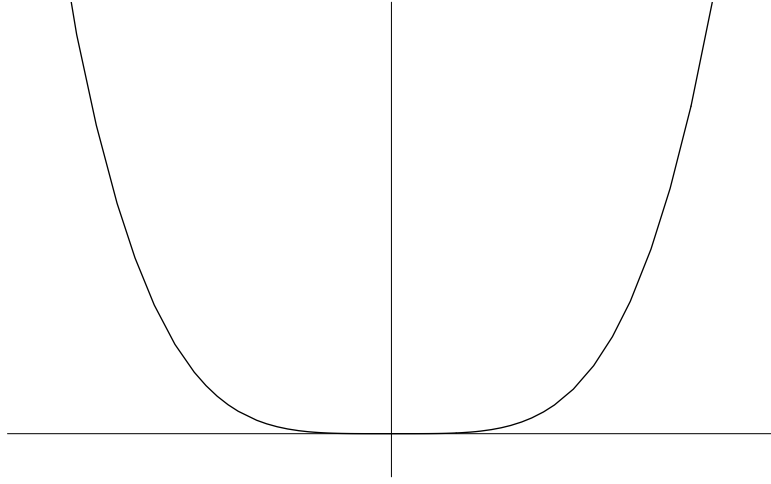


Figura 1. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha > 0$.

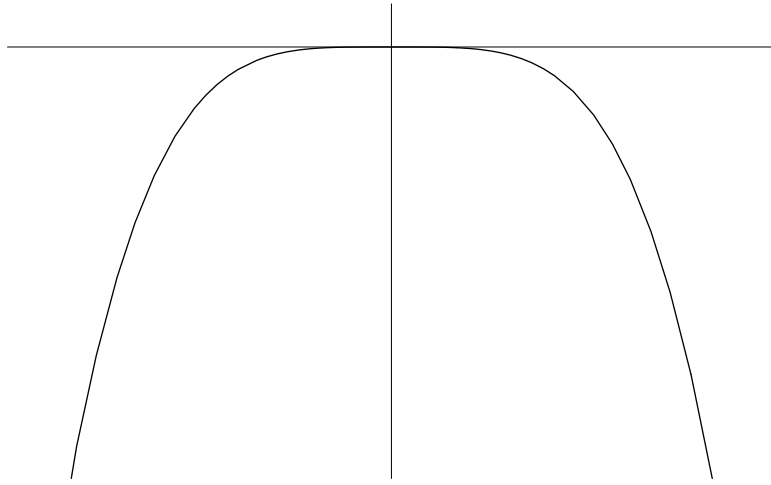


Figura 2. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha < 0$.

quindi se $\alpha \neq 0$ l'unico punto d'equilibrio è $(0, 0)$, mentre se $\alpha = 0$ ogni punto $(x, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$, è un punto d'equilibrio.

4.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Se $\alpha > 0$ il punto $x = 0$ è un punto di minimo isolato per l'energia potenziale, quindi per il teorema di Dirichlet costituisce un punto d'equilibrio stabile.

Per $\alpha < 0$ il punto $x = 0$ è un punto di massimo, quindi è un punto d'equilibrio instabile: questo sarà verificato *a posteriori* anche dalla forma delle curve di livello nello spazio delle fasi vicino al punto $(x, y) = (0, 0)$.

Per $\alpha = 0$ i punti $(x, y) = (x, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$, sono punti d'equilibrio instabile. Infatti per $\alpha = 0$ l'equazione del moto diventa $\ddot{x} = 0$, che può essere integrata immediatamente e dà $x(t) = x_0 + v_0 t$, dove $x_0 = x(0)$ e $v_0 = \dot{x}(0)$. Quindi, per ogni punto d'equilibrio $(x_0, 0)$ lungo l'asse delle x , si può prendere un dato iniziale (x_0, v_0) arbitrariamente vicino (i.e. con v_0 arbitrariamente piccolo) tale che la corrispondente traiettoria $x(t) = x_0 + v_0 t$ si allontani indefinitamente al crescere di t .

4.4. Analisi qualitativa. Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y^2 + V(x) = E \right\}$$

dell'energia del sistema. Definiamo

$$F(x) = \sqrt{2(E - V(x))} = \sqrt{2\left(E - \frac{\alpha}{2n}x^{2n}\right)},$$

in modo da poter riscrivere

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm F(x) \right\}.$$

Dal grafico della Figura 1 vediamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $\alpha > 0$ si ha $\Gamma_E \neq \emptyset$ per ogni valore di $E \geq 0$. Inoltre per ogni valore di E la curva Γ_E è simmetrica sia rispetto all'asse x sia rispetto all'asse y . Poiché $\dot{x} = y$, i versi di percorrenza delle orbite saranno sempre da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore.

Per $E = 0$ si ha $\Gamma_0 = \{(0, 0)\}$, mentre per ogni $E > 0$, se indichiamo con $x_{\pm}(E)$ le due radici dell'equazione $x^{2n} - 2nE/\alpha$, i.e.

$$x_-(E) = -\left(\frac{2nE}{\alpha}\right)^{1/2n}, \quad x_+(E) = \left(\frac{2nE}{\alpha}\right)^{1/2n},$$

la curva di livello Γ_E risulta essere una curva chiusa regolare che interseca l'asse delle x nei punti $x_{\pm}(E)$. Le curve di livello sono quindi come rappresentate in Figura 3. Si noti in particolare che per $n = 1$ le curve di livello diventano due ellissi di semiassi di lunghezza $\sqrt{2E}$ e $\sqrt{2E/\alpha}$.

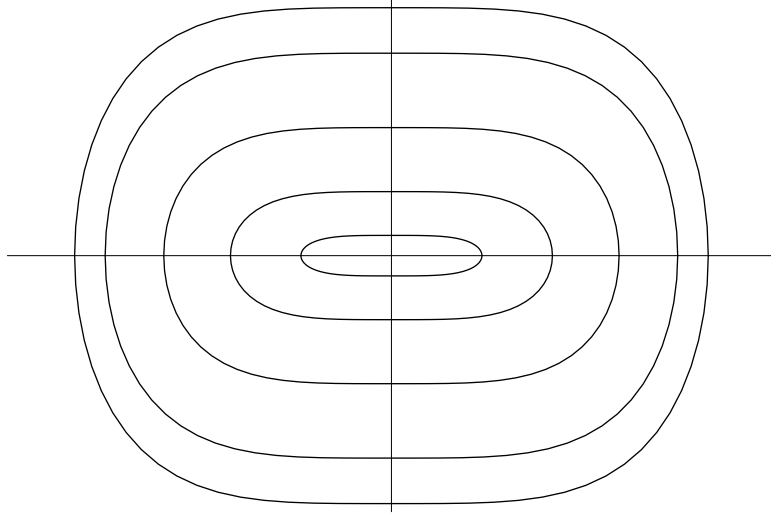


Figura 3. Piano delle fasi per $\alpha > 0$.

Per $\alpha < 0$ si ha $\Gamma_E \neq \emptyset$ per ogni $E \in \mathbb{R}$, poiché $V(x)$ non è limitato inferiormente. Per $E = 0$ si ha

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \sqrt{-2\alpha} x^n \right\},$$

e quindi Γ_0 contiene 5 orbite: il punto d'equilibrio instabile e 4 orbite asintotiche (o nel futuro o nel passato) al punto d'equilibrio. Si noti che tali orbite arrivano al punto d'equilibrio con tangenza orizzontale per $n > 1$ poiché $V''(0) = 0$, e con tangenza obliqua per $n = 1$ poiché $V''(0) = \alpha < 0$. Le altre orbite si ottengono utilizzando la continuità della funzione energia e la dipendenza continua dai dati iniziali. Cfr. la Figura 4 per $n = 1$ e la Figura 5 per $n \geq 2$.

Infine per $\alpha < 0$ si ha

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \sqrt{2E} \right\},$$

purché $E \geq 0$. Cfr. la Figura 6.

4.5. Traiettorie periodiche. Per $\alpha \leq 0$ le Figure 4, 5 e 6 mostrano che non si hanno traiettorie periodiche. Al contrario per $\alpha > 0$ ogni dato iniziale con energia $E > 0$ genera una traiettoria periodica. Il corrispondente periodo è

$$T(E) = 2 \int_{-x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2 \left(E - \frac{\alpha}{2n} x^{2n} \right)}} = 4 \int_0^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2 \left(E - \frac{\alpha}{2n} x^{2n} \right)}}.$$

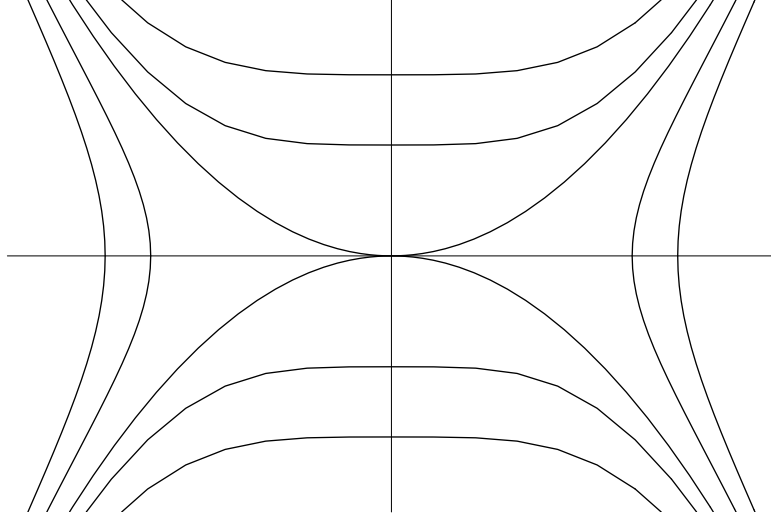


Figura 4. Piano delle fasi per $\alpha < 0$ e $n = 1$.

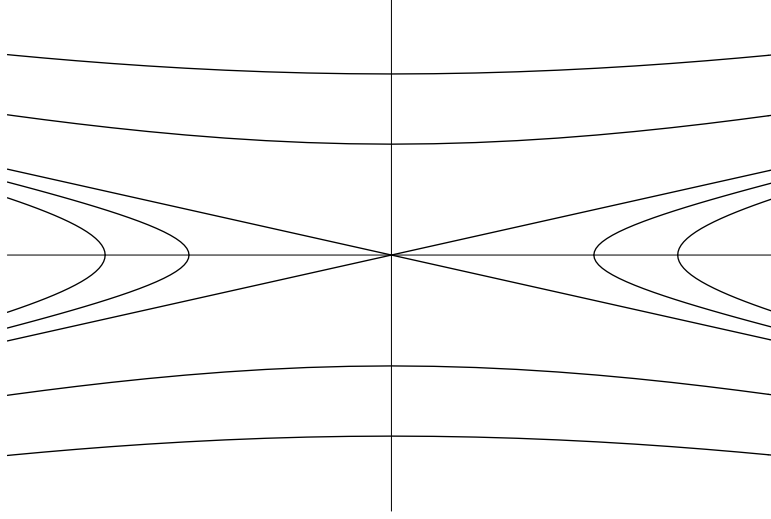


Figura 5. Piano delle fasi per $\alpha < 0$ e $n \geq 2$.

4.6. Dipendenza del periodo dall'energia. Per $\alpha > 0$ ed $E > 0$ si operi il cambio di variabile

$$x = \left(\frac{2nE}{\alpha} \right)^{1/2n} y \quad \implies \quad dx = \left(\frac{2nE}{\alpha} \right)^{1/2n} dy,$$

così che per $x = x_{\pm}(E)$ si ha $y = y_{\pm}(E) = \pm 1$. Quindi il periodo $T(E)$ diventa

$$4 \left(\frac{2nE}{\alpha} \right)^{1/2n} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{2E(1-y^{2n})}} = 2\sqrt{2} \left(\frac{2n}{\alpha} \right)^{1/2n} I(n) E^{1/2n} E^{-1/2} = 2\sqrt{2} \left(\frac{2n}{\alpha} \right)^{1/2n} I(n) E^{-(n-1)/2n},$$

dove si è definito

$$I(n) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^{2n}}}.$$

Quindi se si pone

$$c(n, \alpha) = 2\sqrt{2} \left(\frac{2n}{\alpha} \right)^{1/2n} I(n),$$

Figura 6. Piano delle fasi per $\alpha = 0$.

si ottiene

$$T(E) = c(n, \alpha) E^{-(n-1)/2n}.$$

4.7. Periodo indipendente da E . Dall'espressione di $T(E)$ trovata al punto precedente si vede che $T(E)$ non dipende da E per $n = 1$. In tal caso si ha

$$T(E) = c(1, \alpha) = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} I_1 = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

L'integrale si calcola esplicitamente operando il cambio di variabile

$$x = \sin \theta \quad \implies \quad dx = \cos \theta d\theta.$$

Inoltre per $x \in [0, 1]$ la variabile θ varia nell'intervallo $\theta \in [0, \pi/2]$, dove $\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$, così che

$$T(E) = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}.$$

4.8. Equazione differenziale per la funzione $T(E)$. Poiché risulta $T(E) = c(n, \alpha) E^{-(n-1)/2n}$ si ha

$$\frac{d}{dE} T(E) = -\frac{n-1}{2n} c(n, \alpha) E^{-((n-1)/2n)-1} = -\frac{n-1}{2n} c(n, \alpha) E^{-(3n-1)/2n},$$

e scrivendo

$$\begin{aligned} E^{-(3n-1)/2n} &= \left(E^{-(n-1)/2n}\right)^{(3n-1)/(n-1)} = (c(n, \alpha))^{-(3n-1)/(n-1)} \left(c(n, \alpha) E^{-(n-1)/2n}\right)^{(3n-1)/(n-1)} \\ &= (c(n, \alpha))^{-(3n-1)/(n-1)} (T(E))^{(3n-1)/(n-1)}, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\frac{d}{dE} T(E) = -\frac{n-1}{2n} (c(n, \alpha))^{1-(3n-1)/(n-1)} (T(E))^{((3n-1)/(n-1))}.$$

Si ha quindi, ponendo $T' = dT/dE$,

$$T' = \beta_n T^{(3n-1)/(n-1)}, \quad \beta_n = \frac{n-1}{2n} (c(n, \alpha))^{1-(3n-1)/(n-1)} = \frac{n-1}{2n} (c(n, \alpha))^{-2n/(n-1)},$$

che rappresenta l'equazione differenziale cercata.

ESERCIZIO 5. Cfr. Cap. 4, §16, paragrafi 16.7 e 16.21.

ESERCIZIO 6. Cfr. Cap. 10, §42, paragrafo 42.33 ed esercizio 14.