Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato I - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

<u>Esercizio 1.</u> Considerata la sostituzione $y = tx$, l'equazione differenziale diventa

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{e^t - 1}{ye^t} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Risolvendo per separazione di variabili troviamo quindi

$$y\dot{y} = \frac{e^t - 1}{e^t}$$

integrando ambo i membri troviamo

$$\int_2^y z \mathrm{d}z = \int_1^t \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{e}^\tau - 1}{\mathrm{e}^\tau}$$

ovvero

$$\frac{y^2}{2} - 2 = t + e^{-t} - e^{-1} - 1 \quad \Longrightarrow \quad y^2(t) = 2\left(t + e^{-t} - e^{-1} + 1\right)$$

e quindi

$$x(t) = \sqrt{\frac{2\left(t + e^{-t} - e^{-1} + 1\right)}{t}}$$

Si osservi che è stata scelta la determinazione positiva perché deve valere $x(1) = 2$.

<u>Esercizio 2.</u> Sostituendo $y = \dot{x}$ il problema diventa

$$\begin{cases} \dot{y} = -y^2 t \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e vediamo immediatamente che questa ha soluzione banale $y(t) \equiv 0$ e quindi da

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $x(t) \equiv 1$.

<u>Esercizio 3.</u> Considerata la sostituzione $y = \frac{x}{t}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{y^2 - 2y}{t} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_1^y \mathrm{d}z \left(\frac{1}{z^2 - 2z}\right) = \int_1^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{\tau}$$

ovvero, imponendo $y < 2$,

$$\frac{1}{2} \ln \left|\frac{2 - y}{y}\right| = \ln |t|$$

e dunque

$$\left|\frac{2 - y}{y}\right| = t^2$$

Poiché deve valere $y(1) = 1$ avremo

$$\frac{2-y}{y} = t^2$$

ossia

$$y(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

<u>ESERCIZIO 4.</u> Intanto scriviamo il sistema nella forma

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)(-1-\lambda)$$

quindi lo spettro di A sarà $\Sigma(A) = \{1, -1\}$. Ora $E^*(1) = Ker(A - \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$E^*(1) = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

mentre $E^*(-1) = Ker(A + \mathbb{1})$ è dato da

$$\{2x + 2y = 0$$

ovvero

$$E^*(-1) = \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto una base di autovettori è data, ad esempio, da

$$v_1 = (1, 0) \qquad v_2 = (1, -1)$$

quindi scriviamo

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che $Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{exp(At)} &= Q^{-1}\mathrm{exp(\widetilde{S}t)Q} \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La soluzione del sistema è quindi

$$\begin{cases} x(t) = e^t - e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 5.</u> Ricordiamo che per flusso globalmente definito si intende che la soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$.
(5.1) Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = t - t_0$$

ovvero

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - t_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0 t_0 - x_0 t}$$

che non è definita per $t = t_0 + 1/x_0$.

(5.2) Poiché il campo vettoriale è definito su un compatto, allora sappiamo che la soluzione è definita globalmente.
(5.3) Risolvendo per separazione di variabili avremo

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}y e^y = t - t_0$$

cioè

$$e^x - e^{x_0} = t - t_0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \ln(t - t_0 + e^{x_0})$$

che è definita solo per $t > t_0 - e^{x_0}$.
(5.4) Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$x(t) = x_0 e^{2(t-t_0)}$$

che è definita globalmente.

<u>Esercizio 6.</u> Intanto notiamo immediatamente che $\forall \alpha > 0$ il sistema ammette sempre la soluzione banale $x(t) \equiv 0$.
(6.1) Se $\alpha \geq 1$ allora la funzione $f(x) = x^\alpha$ è lipschitziana quindi, per il teorema di uncità, l'unica soluzione è data da $x(t) \equiv 0$. Se invece $0 < \alpha < 1$ il campo vettoriale non è lipischitziano intorno all'origine: questo non ci dice nulla riguardo l'unicità della soluzione. D'altra parte per $0 < \alpha < 1$ possiamo integrare per separazione di variabili,

$$\int_0^x y^{-\alpha} \mathrm{d}y = t$$

da cui

$$\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t \quad \Longrightarrow \quad x(t) = ((1-\alpha)t)^{1/(1-\alpha)}$$

ovvero riusciamo ad esibire un'altra soluzione del problema e dunque possiamo concludere che per $0 < \alpha < 1$ la soluzione non è unica.
(6.2) Cambiando il dato iniziale con $x(0) = 1$ avremo che $f(x) = x^\alpha$ è lipschitziana $\forall \alpha > 0$ in un intorno di $x_0 = 1$ e dunque, dal teorema di unicità, la soluzione è unica.