Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO X - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Trasformazione rigida.** Cerchiamo intanto la legge del moto di O'. Per individuare la curva lungo cui si muove O' notiamo che le sue componenti sono soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\gamma = A\gamma \\ \gamma(0) = (1,0,0) \end{cases} \qquad \gamma \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e tale sistema, come sappiamo, ha per soluzione

$$\gamma(t) = \gamma(0)\exp(At), \qquad \exp(At) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathbf{r}(t) = \gamma(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$. L'angolo di rotazione è dato da $\theta(t) = \omega_0 t$. Pertanto possiamo scrivere la trasformazione rigida come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & -\sin\omega_0 t & 0 \\ \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.2) **Legge del moto in K.** Poiché P si muove lungo l'asse η la legge del moto sarà del tipo $\mathbf{Q} = (0, \eta(t), 0)$ con $\eta(t)$ che verifica l'equazione $\ddot\eta + \lambda\eta = 0$ e quindi $\eta(t) = a_0 \cos\sqrt{\lambda}t + b_0 \sin\sqrt{\lambda}t$ dove a_0 è la coordinata lungo l'asse η della posizione iniziale di P, mentre b_0 è tale che $b_0\sqrt{\lambda}$ è la sua velocità iniziale. Indichiamo $\alpha = \sqrt{\lambda}$.

Legge del moto in κ. Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}(t)$, ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= B \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\eta(t)\sin\omega_0 t \\ \eta(t)\cos\omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\eta(t)\sin\omega_0 t + \cos\omega t \\ \eta(t)\cos\omega_0 t + \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1.3) **Velocità assoluta.** Derivando il vettore $\mathbf{q}(t)$ troviamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -\dot\eta(t)\sin\omega_0 t - \omega_0\eta(t)\cos\omega_0 t - \omega\sin\omega t \\ \dot\eta\cos\omega_0 t - \omega_0\eta(t) sin \omega_0 t + \omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove naturalemente $\dot\eta(t) = b_0\alpha\cos\alpha t - a_0\alpha\sin\alpha t$.

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P in K troviamo $\dot{\mathbf{Q}} = (0, \dot\eta(t), 0)$, perciò la velocità relativa è

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -\dot\eta(t)\sin\omega_0 t \\ \dot\eta(t)\cos\omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.4) **Componente traslatoria.** Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t, 0)$

(1.5) **Componente rotatoria.** Poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di κ, abbiamo $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_0)$. Da ciò otteniamo quindi $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}-\mathbf{r}] = (-\omega_0 \eta(t) \cos \omega_0 t, -\omega_0 \eta(t) \sin \omega_0 t, 0)$.

(1.6) **Forza centrifuga.** Sappiamo che $F_{\text{cf}} = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\boldsymbol{\Omega} = B\boldsymbol{\omega}$ e quindi nel nostro caso avremo $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)$. Perciò otteniamo $F_{\text{cf}} = (0, \omega_0^2 \eta(t), 0)$.

Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo che nel nostro caso vale $F_{\text{cor}} = (2\omega_0 \dot{\eta}(t), 0, 0)$.

Esercizio 2.

(2.1) **Trasformazione rigida.** Il vettore che individua O' nel sistema κ è dato da $\mathbf{r}(t) = (t \sin t, t^2 \sin^2 t, 0)$ mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\text{tg}\theta(t) = \dot{y}_{O'}/\dot{x}_{O'}$ con $\dot{y}_{O'} = 2t \sin t(\sin t + t \cos t)$ e $\dot{x}_{O'} = \sin t + t \cos t$, e quindi

$$\theta(t) = \text{arctg}(2t \sin t)$$

dunque la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \sin t \\ t^2 \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.2) **Legge del moto.** Poiché P si muove in K lungo una circonferenza, la legge del moto in K sarà data da $\mathbf{Q}(t) = (\cos 4t, \eta(t), 0)$ dove $\eta(t) = \pm \sin 4t$ a seconda che il punto si muova in senso antiorario o orario. Per ottenere la legge del moto in κ basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}$, ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= B \begin{pmatrix} \cos 4t \\ \eta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \sin t \\ t^2 \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 4t \cos\theta(t) - \eta(t) \sin\theta(t) \\ \cos 4t \sin\theta(t) + \eta(t) \cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \sin t \\ {t^1}^2 \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 4t \cos\theta(t) - \eta(t) \sin\theta(t) + t \sin t \\ \cos 4t \sin\theta(t) + \eta(t) \cos\theta(t) + t^2 \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(4t \pm \theta(t)) + t \sin t \\ \sin(4t \pm \theta(t)) + t^2 \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.3) **Velocità assoluta.** Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P in κ, ovvero

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{pmatrix} -(4 \pm \dot{\theta}(t)) \sin(4t \pm \theta(t)) + \sin t + t \cos t \\ (4 \pm \dot{\theta}(t)) \cos(4t \pm \theta(t)) + 2t \sin t(\sin t + t \cos t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove ovviamente

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2(\sin t + t \cos t)}{1 + 4t^2 \sin^2 t}$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (-4 \sin 4t, \dot{\eta}(t), 0)$ perciò la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -4 \sin 4t \cos\theta(t) - \eta(t) \sin\theta(t) \\ -4 \sin 4t \sin\theta(t) + \eta(t) \cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin(4t \pm \theta(t)) \\ 4 \cos(4t \pm \theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.4) **Componente traslatoria.** Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (\sin t + t\cos t, 2t\sin t(\sin t + t\cos t), 0)$.

(1.5) **Componente rotatoria.** Sappiamo che $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$, con $|\boldsymbol{\omega}| = \dot{\theta}$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di κ, avremo $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (-\dot{\theta}(t)\sin(4t \pm \theta(t)),\ \dot{\theta}(t)\cos(4t \pm \theta(t)),\ 0)$$

(1.6) **Forza centrifuga.** Sappiamo che $F_{\text{cf}} = -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\boldsymbol{\Omega} = B\boldsymbol{\omega}$ e quindi, nel nostro caso $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Perciò troviamo $F_{\text{cf}} = (\dot{\theta}^2(t)\cos 4t, \dot{\theta}^2(t)\eta(t), 0) = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$.

Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{cor}} = 2\dot{\theta}(t)(\dot{\eta}(t),\ 4\sin 4t,\ 0) = \pm 4\dot{\theta}(t)\mathbf{Q}$ dove avremo segno positivo se il punto si muove in senso antiorario e negativo altrimenti.

<u>Esercizio 3.</u>

(3.1) **Trasformazione rigida.** Notiamo subito che O' è fermo nel sistema κ, perciò la trasformazione rigida è data solo da una rotazione che può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\dot{\theta} = \omega_0$ e quindi, poiché all'istante iniziale i due sistemi coincidono, avremo $\theta(t) = \omega_0 t$.

(3.2) **Legge del moto.** Poiché P si muove in K lungo una circonferenza, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t, 0)$. Per ottenere la legge del moto in κ basterà applicare la trasformazione B a $\mathbf{Q}$, ottenendo

$$\mathbf{q}(t) = B\begin{pmatrix} \cos\omega_1 t \\ \sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos((\omega_0 + \omega_1)t) \\ \sin((\omega_0 + \omega_1)t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.3) **Velocità assoluta.** Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, quindi basta derivare il vettore che individua P nel sistema K:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -(\omega_0 + \omega_1)\sin((\omega_0 + \omega_1)t) \\ (\omega_0 + \omega_1)\cos((\omega_0 + \omega_1)t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P in K otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (-\omega_1\sin\omega_1 t, \omega_1\cos\omega_1 t, 0)$, perciò la velocità relativa sarà data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -\omega_1\sin((\omega_0 + \omega_1)t) \\ \omega_1\cos((\omega_0 + \omega_1)t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.4) **Componente traslatoria.** Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo immediatamente $\mathbf{v}_0 = 0$.

Componente rotatoria. Sappiamo che $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$, con $|\boldsymbol{\omega}| = \omega_0$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di κ, avremo $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_0)$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (-\omega_0\sin((\omega_0 + \omega_1)t),\ \omega_0\cos((\omega_0 + \omega_1)t),\ 0)$$

(3.5) **Forza centrifuga.** Sappiamo che $F_{\text{cf}} = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\boldsymbol{\Omega} = B\boldsymbol{\omega}$ e quindi, nel nostro caso $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Perciò troviamo $F_{\text{cf}} = 2\omega_0^2\mathbf{Q}(t)$.

Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{cor}} = 4\omega_0\omega_1\mathbf{Q}(t)$.

(3.6) **Parametri per cui P è fermo in κ.** Affinché P risulti fermo in κ deve valere $\dot{\mathbf{q}}(t) = 0\ \forall t$ ovvero

$$\begin{cases} -(\omega_0 + \omega_1)\sin((\omega_0 + \omega_1)t) = 0 \\ (\omega_0 + \omega_1)\cos((\omega_0 + \omega_1)t) = 0 \end{cases}$$

indipendentemente da t e questo può accadere se e solo se $\omega_1 = -\omega_0$.

(3.7) **Moto globalmente periodico.** Sappiamo che il periodo della rotazione del sistema K è $T_0 = 2\pi/\omega_0$ mentre il periodo del moto di P in K è $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Affinché il moto sia globalmente periodico deve esistere un tempo T in cui K coincide con κ e il punto si trova nella posizione iniziale in K. Scegliamo per semplicità $\mathbf{q}(0) = (1, 0, 0)$. Poiché il periodo della rotazione di K è T_0, i possibili periodi del moto complessivo dovranno necessariamente essere della forma $t_n = nT_0$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$. D'altra parte se $t = t_n$ allora

$$\mathbf{q}(t_n) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 n T_0) \\ \sin(\omega_1 n T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} 2n\pi\right) \\ \\ \sin\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} 2n\pi\right) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ma allora, affinché esista un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $\mathbf{q}(t_n) = \mathbf{q}(0)$ deve valere $\omega_1/\omega_0 \in \mathbb{Q}$.