

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO XI - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Poiché l'asse  $z$  si mantiene parallelo all'asse  $\zeta$ , allora avremo che  $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t))$  dove  $\theta(t)$  è l'angolo di rotazione del sistema  $K$ ; scriviamo inoltre  $\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3)$  dove  $\{z = Q_3\}$  è il piano su cui si svolge il moto. Ma allora la forza centrifuga è data da  $F_{cf} = -m[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$  e si vede facilmente che  $F_{cf} = m\dot{\theta}^2(t)(Q_1(t), Q_2(t), 0)$  ovvero è proporzionale alla proiezione su  $\{z = 0\}$  di  $\mathbf{Q}(t)$ .

Se il sistema ruota con velocità angolare costante allora  $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \omega)$  con  $\omega = \dot{\theta}(t)$  costante. Sappiamo che la forza di Coriolis è data da  $F_{cor} = -2m[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$  e quindi in generale è  $F_{cor} = 2m\omega(\dot{Q}_2, -\dot{Q}_1, 0)$ . Se  $P$  si muove lungo una circonferenza centrata sull'asse  $z$  (ad altezza  $Q_3$ ) allora  $\mathbf{Q}(t) = (R \cos \alpha t, R \sin \alpha t, Q_3)$  dove  $\alpha$  è la velocità angolare del punto e  $R$  è il raggio della circonferenza. In tal caso la forza di Coriolis è data da  $F_{cor} = 2m\omega\alpha(R \cos \alpha t, R \sin \alpha t, 0)$ . Viceversa se la forza di Coriolis è proporzionale alla proiezione su  $\{z = 0\}$  di  $\mathbf{Q}(t)$ , allora impostiamo il sistema

$$\begin{cases} 2m\omega\dot{Q}_2 = aQ_1 \\ 2m\omega\dot{Q}_1 = -aQ_2 \end{cases}$$

dove  $a$  è la costante di proporzionalità. Risolvendo il sistema troviamo che le soluzioni generali sono

$$\begin{cases} Q_1(t) = c_2 \cos\left(\frac{a}{2m\omega}t\right) - c_1 \sin\left(\frac{a}{2m\omega}t\right) \\ Q_2(t) = c_1 \cos\left(\frac{a}{2m\omega}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{a}{2m\omega}t\right) \end{cases}$$

che possiamo sempre scrivere nella forma

$$\begin{cases} Q_1(t) = R \cos\left(\frac{a}{2m\omega}t + \phi\right) \\ Q_2(t) = R \sin\left(\frac{a}{2m\omega}t + \phi\right) \end{cases}$$

con  $R$  e  $\phi$  opportuni.

ESERCIZIO 2.

(2.1) **Trasformazione rigida.** Cominciamo con l'osservare che il sistema dinamico planare che individua la curva  $\gamma(t)$  ammette una costante del moto data da

$$H(x, y) = y(y - x^2 + 1)$$

Inoltre la posizione iniziale di  $O'$  ci garantisce che  $\mathbf{q}_{O'}(t)$  è la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(0, -1) = 0\}$$

che possiamo scrivere come  $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  con

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\} \end{aligned}$$

Inoltre il moto di  $O'$  si svolgerà esclusivamente lungo la curva

$$\mathcal{C}_2^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 < x < 1\}$$

perché il dato iniziale si trova in  $\mathcal{C}_2^*$ .

Ma allora sostituendo  $y = x^2 - 1$  nella prima equazione del sistema, troviamo

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

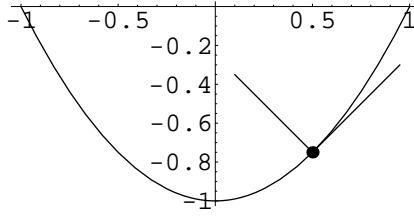


Figura 1: Moto del sistema  $K$

e risolvendo per separazione di variabili avremo

$$\log \left| \frac{x(t) - 1}{x(t) + 1} \right| = 2t$$

ovvero, tenendo conto che  $|x| < 1$ ,

$$x(t) = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

e quindi troviamo che

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{q}_{O'}(t) = \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}, \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)^2 - 1, 0 \right)$$

La rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $\theta(t)$  è tale che  $\operatorname{tg} \theta(t) = \dot{y}_{O'}/\dot{x}_{O'}$  ma allora

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \frac{2x(t)y(t)}{2y(t) - x^2(t) + 1} = \frac{2x(t)(x^2(t) - 1)}{x^2(t) - 1} = 2x(t) = 2 \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

e quindi

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \left( 2 \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)$$

(2.2) **Legge del moto nel sistema  $K$ .** Poiché  $P$  si muove esclusivamente lungo l'asse  $\xi$ , la legge del moto nel sistema relativo sarà della forma

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(**Modo 1**). Poiché il punto si muove sotto l'azione di un potenziale conservativo a energia nulla, possiamo scrivere la legge

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$\dot{\xi} = \pm \sqrt{-2V(\xi)}$$

dove il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale. Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm \sqrt{2}t$$

ovvero

$$\xi(t) = \pm \sin \sqrt{2}t$$

(**Modo 2**). L'equazione del moto di  $P$  è data da

$$\ddot{\xi} = -\frac{dV}{d\xi} = -2\xi$$

la cui soluzione generale è

$$\xi(t) = c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Sostituendo il dato iniziale  $\xi(0) = 0$  troviamo che deve essere  $c_1 = 0$  e quindi  $\xi(t) = c_2 \sin \sqrt{2}t$ . Dalla legge di conservazione dell'energia inoltre, sappiamo che deve valere

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$c_2^2 \cos^2 \sqrt{2}t + c_2^2 \sin^2 \sqrt{2}t - 1 = 0$$

e quindi  $c_2 = \pm 1$  e il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale, ovvero

$$\xi(t) = \pm \sin \sqrt{2}t$$

**Legge del moto in  $\kappa$ .** Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione  $D$  a  $\mathbf{Q}(t)$ , ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= B \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O'}(t) \\ y_{O'}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi(t) \cos \theta(t) + x_{O'}(t) \\ \xi(t) \sin \theta(t) + y_{O'}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.3) **Velocità assoluta.** Derivando il vettore  $\mathbf{q}(t)$  troviamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \cos \theta(t) - \xi(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{x}_{O'}(t) \\ \dot{\xi}(t) \sin \theta(t) + \xi(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + \dot{y}_{O'}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove ovviamente

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \pm \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{(1 + e^{2t})^2}{3 - 2e^{2t} + 3e^{4t}} \\ \dot{x}_{O'}(t) &= \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)^2 - 1 \\ \dot{y}_{O'}(t) &= 2 \left( \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)^3 - 2 \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \end{aligned}$$

**Velocità relativa.** Derivando il vettore che individua  $P$  in  $K$  troviamo  $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (\dot{x}(t), 0, 0)$ , perciò la velocità relativa é

$$\mathbf{v}' = B \dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \cos \theta(t) \\ \dot{\xi}(t) \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.4) **Componente traslatoria.** Da  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$  troviamo  $\mathbf{v}_0 = (\dot{x}_{O'}(t), \dot{y}_{O'}(t), 0)$ .

(2.5) **Componente rotatoria.** Poiché l'asse di rotazione del sistema mobile si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , abbiamo  $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$ . Da ciò otteniamo quindi  $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\dot{\theta}(t)\xi(t) \cos \theta(t), \dot{\theta}(t)\xi(t) \sin \theta(t), 0)$ .

(2.6) **Forza centrifuga.** Dall'esercizio 1 sappiamo che la forza centrifuga è proporzionale al vettore che individua  $P$  nel piano  $O\xi\eta$  e più precisamente  $F_{cf} = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$ .

**Forza di Coriolis.** Da  $F_{cor} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$  unitamente al fatto che, poiché l'asse di rotazione di  $K$  si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , si ha  $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)$ , otteniamo  $F_{cor} = (0, -2\dot{\theta}(t)\dot{\xi}(t), 0)$ .

### ESERCIZIO 3.

(3.1) **Trasformazione rigida.** Il vettore che individua  $O'$  nel sistema  $\kappa$  è dato da  $\mathbf{r}(t) = (t^2 \cos t^2, t^2 \sin t^2, 0)$  mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $\theta(t)$  è tale che  $\dot{\theta}(t) = \omega_0$  e quindi, poiché all'istante iniziale i due sistemi coincidono, avremo  $\theta(t) = \omega_0 t$ .

(3.2) **Legge del moto.** Poiché  $P$  si muove in  $K$  lungo la parabola piana di equazione  $\eta = \xi^2$ , la legge del moto in  $K$  sarà semplicemente  $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (e^t, e^{2t}, 0)$ . Per ottenere la legge del moto in  $\kappa$  basterà applicare la trasformazione  $D$  a  $\mathbf{Q}$ , ottenendo

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= B \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \cos t^2 \\ t^2 \sin t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos \omega_0 t - e^{2t} \sin \omega_0 t + t^2 \cos t^2 \\ e^t \sin \omega_0 t + e^{2t} \cos \omega_0 t + t^2 \sin t^2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3.3) **Velocità assoluta.** Derivando il vettore  $\mathbf{q}(t)$  otteniamo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (e^t - \omega_0 e^{2t}) \cos \omega_0 t - (2e^{2t} + \omega_0 e^t) \sin \omega_0 t + 2t \cos t^2 - 2t^3 \sin t^2 \\ (e^t - \omega_0 e^{2t}) \sin \omega_0 t + (\omega_0 e^t + 2e^{2t}) \cos \omega_0 t + 2t \sin t^2 + 2t^3 \cos t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Velocità relativa.** Derivando il vettore che individua  $P$  in  $K$  otteniamo  $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (e^t, 2e^{2t}, 0)$ , perciò la velocità relativa sarà data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} e^t \cos \omega_0 t - 2e^{2t} \sin \omega_0 t \\ e^t \sin \omega_0 t + 2e^{2t} \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.4) **Componente traslatoria.** Da  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$  troviamo

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 2t \cos t^2 - 2t^3 \sin t^2 \\ 2t \sin t^2 + 2t^3 \cos t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.5) **Componente rotatoria.** Sappiamo che  $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$ , e poiché l'asse di rotazione del sistema mobile si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , avremo  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ . Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (-\omega_0(e^t \cos \omega_0 t - e^{2t} \sin \omega_0 t), \omega_0(e^t \sin \omega_0 t + e^{2t} \cos \omega_0 t), 0)$$

(3.6) **Forza centrifuga.** Dall'esercizio 1 sappiamo che la forza centrifuga è proporzionale al vettore che individua  $P$  nel piano  $O\xi\eta$  e più precisamente  $F_{cf} = \omega_0^2 \mathbf{Q}(t)$ .

**Forza di Coriolis.** Da  $F_{cor} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$  troviamo  $F_{cor} = (4\omega_0 e^{2t}, -2\omega_0 e^t, 0)$ .