Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
Tutorato II - Livia Corsi (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Cominciamo intanto con lo scrivere il sistema nella forma

$$\dot{\xi} = A\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^3 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $\xi(0) = \xi_0 = (0, 1, 1)$ e osserviamo che possiamo scrivere A come

$$A = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che $N^3 = (0)_{ij}$ e che $[\mathbb{1}, N] = 0$ dato che una delle due è l'identità. Ma allora

$$\exp(At) = \exp(\mathbb{1}t)(\mathbb{1} + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2e^t}{2} \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

dunque la soluzione del sistema è data da

$$\xi(t) = \exp(At)\xi_0 = \begin{pmatrix} te^t + \frac{t^2e^t}{2} \\ e^t + te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = te^t(1 + \dfrac{t}{2}) \\ y(t) = e^t(1 + t) \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

Esercizio 2. Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice A il cui polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1}) = -\lambda^3 - 36\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 36)$$

e dunque lo spettro di A sarà $\Sigma(A) = 0, 6i, -6i$; calcoliamo quindi gli autospazi (generalizzati). $E^*(0) = Ker(A)$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0 \\ -7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -4x_3 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(0) = \{(-2t, -4t, t)\mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

$E^*(6i) = Ker(A - 6i\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} 2(1-3i)x_1 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6ix_2 - 4x_3 = 0 \\ -7x_1 + 3x_2 - 2(1+3i)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_3 = -\dfrac{1}{2}(1-3i)x_1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

da cui

$$E^*(6i) = \{(t, , -t, (-(1-3i)/2)t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

da cui possiamo ricavare i due vettori coniugati

$$\varphi = (1, -1, -(1-3i)/2) \qquad \overline{\varphi} = (1, -1, -(1+3i)/2)$$

che scriviamo nella forma $(1, -1, -1/2) \pm i(0, 0, -3/2)$. Consideriamo quindi i due vettori reali

$$u = (1, -1, 1/2) \qquad v = (0, 0, 3/2)$$

Pertanto una base di autovettori (generalizzati) è data da $u, v, w = (-2, -4, 1)$. In questo modo avremo

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 0 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

e osserviamo inoltre che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$ che quindi è semisemplice e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S})Q \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 6t & -\sin 6t \\ 0 & \sin 6t & \cos 6t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 0 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\cos 6t - \sin 6t) & -\frac{1}{3}\cos 6t & -\frac{2}{3}\sin 6t \\ -\frac{1}{3}(2\cos 6t - \sin 6t) & \frac{1}{3}\cos 6t & \frac{2}{3}\sin 6t \\ \frac{1}{6}(\cos 6t + 7\sin 6t) & \frac{1}{6}(\cos 6t - 3\sin 6t) & \cos 6t + \frac{1}{3}\sin 6t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione con dato iniziale $x(0) = (1, 2, 1)$ è data da

$$x(t) = \exp(At)x(0) = \begin{pmatrix} -\sin 6t \\ \sin 6t \\ \frac{1}{2}(3\cos 6t + \sin 6t) \end{pmatrix}$$

In particolare osserviamo che nella base degli autovettori possiamo scrivere il sistema nella forma

$$\dot{x} = \widetilde{S}x$$

in cui si vede chiaramente che il moto è planare e si svolge su un piano (affine) parallelo al piano (vettoriale) descritto da $\{\xi_1 = 0\}$, dove con ξ_1 indichiamo la prima componente di un vettore x rispetto alla base degli autovettori, che scritto nelle coordinate di partenza è $\{x_1 + x_2 = 0\}$. Il piano affine corrispondente dipende dal dato iniziale; in particolare, poiché $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$ avremo che il piano del moto è $\{x_1 + x_2 = 3\}$.

<u>Esercizio 3.</u> Innanzitutto scriviamo il sistema nella forma

$$\dot{\xi} = A\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $\xi(0) = (1, 1)$. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = -(2-\lambda)\lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

e dunque lo spettro di A è $\Sigma(A) = \{1+i, 1-i\}$. L'autospazio (generalizzato) $E^*(1 \pm i)$ è dato da

$$\begin{cases} (1 \mp i)x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - (1 \pm i)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \{x_1 = -(1 \pm i)x_2$$

quindi

$$E^*(1 \pm i) = \{(-(1 \pm i)t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

da cui troviamo i vettori coniugati

$$\varphi = (-1-i, 1) \qquad \overline{\varphi} = (-1+i, 1)$$

che scriviamo nella forma $(-1,1) \pm i(-1,0)$. Perciò avremo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poiché $A = Q^{-1}SQ$ allora

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(St)Q \\ & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t(\cos t + \sin t) & 2e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

quindi la soluzione con dato iniziale $(1,1)$ sarà

$$\begin{cases} x(t) = e^t(\cos t + 3\sin t) \\ y(t) = e^t(\cos t - 2\sin t) \end{cases}$$

<u>Esercizio 4.</u> Cominciamo con il distinguere il caso $\alpha = 0$ dal caso $\alpha \neq 0$. Infatti se $\alpha = 0$ allora possiamo scrivere immediatamente la matrice A come

$$A = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $[\mathbb{1}, N] = 0$ e $N^2 = (0)_{ij}$. Ma allora

$$\exp(At) = \exp(\mathbb{1}t)(\mathbb{1} + Nt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -te^t & e^t \end{pmatrix}$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{01}e^t \\ -x_{01}te^t + x_{02}e^t \end{pmatrix}$$

Se invece $\alpha \neq 0$ allora il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 + \alpha$$

e quindi lo spettro dell'operatore è dato da $\Sigma(A) = \{1 + \sqrt{-\alpha}, 1 - \sqrt{-\alpha}\}$. Consideriamo quindi il caso $\alpha < 0$, poniamo $\omega = \sqrt{-a}$ e calcoliamo gli autospazi; $E^*(1+\omega)$ è dato da

$$\begin{cases} -\omega x_1 - \omega^2 x_2 = 0 \\ -x_1 - \omega x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(1+\omega) = \{(-\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Analogamente si verifica che

$$E^*(1-\omega) = \{(\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

pericò troviamo una base di autovettori è data da

$$u = (-\omega, 1) \qquad v = (\omega, 1)$$

e quindi

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1+\omega \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\omega & \omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che $A = Q^{-1}\widetilde{S}Q$ e quindi

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q \\
&= Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{(1+\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-\omega)t} \end{pmatrix} Q \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t}+e^{\omega t}) & \frac{\omega e^t}{2}(e^{-\omega t}-e^{\omega t}) \\ \\ \frac{e^t}{2\omega}(e^{-\omega t}-e^{\omega t}) & \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t}+e^{\omega t}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e dunque la soluzione generale sarà

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t}+e^{\omega t})x_{01} + \frac{\omega e^t}{2}(e^{-\omega t}-e^{\omega t})x_{02} \\ \\ \frac{e^t}{2\omega}(e^{-\omega t}-e^{\omega t})x_{01} + \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t}+e^{\omega t})x_{02} \end{pmatrix}$$

Infine nel caso $\alpha > 0$ se poniamo $\omega = i\sqrt{\alpha}$ possiamo procedere esattamente come nel caso $\alpha < 0$; la soluzione sarà però espressa in termini di numeri complessi. D'altra parte nomiamo che

$$\frac{e^{-\omega t}+e^{\omega t}}{2} = \cos\sqrt{\alpha}t \qquad \frac{e^{-\omega t}-e^{\omega t}}{2i} = \sin\sqrt{\alpha}t$$

e quindi

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{\alpha}tx_{01} + \sqrt{\alpha}e^t\sin\sqrt{\alpha}tx_{02} \\ -\frac{e^t}{\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}tx_{01} + e^t\cos\sqrt{\alpha}tx_{02} \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio 5.</u> Innanzitutto scriviamo

$$S = \{x(t) = \exp(At)x_0 \ : \ x_0 \in \mathbb{R}^n\}$$

(5.1) Certamente $S \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$; siano quindi $x(t), y(t) \in S$. Allora

$$x(t)+y(t) = \exp(At)x_0 + \exp(At)y_0 = \exp(At)(x_0+y_0)$$

ovvero $x(t)+y(t) \in S$. Inoltre $\forall\lambda\mathbb{R}$ si ha $\lambda x(t) = \lambda\exp(At)x_0 = \exp(At)\lambda x_0$ ovvero $\lambda x(t) \in S$ e quindi S è un sottospazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Infine se consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned}
\phi :&\mathbb{R}^n \longrightarrow S \\
&x_0 \longmapsto \mathrm{exp(At)x_0}
\end{aligned}$$

notiamo immediatamente che è suriettiva e $Ker(\phi) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \phi(x_0) = 0\} = \{0\}$ perciò ϕ è anche iniettiva. Inoltre

$$\phi(ax_0+by_0) = \exp(At)(ax_0+by_0) = a\phi(x_0) + a\phi(y_0)$$

perciò si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali.

(5.2) Innanzitutto osseriviamo che certamente la derivata è un'applicazione lineare da S a $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Inoltre la derivata è un opertatore su S, ossia se $x(t) \in S$ allora $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t] := \dot{x}(t) \in S$. Infatti poiché $\dot{x}(t) = A\exp(At)x_0$ avremo che

$$\ddot{x} = A^2\exp(At)x_0 = A\dot{x}$$

e quindi $\dot{x} \in S$. Mostriamo che se $x(t) = \exp(At)x_0 \in S$ è autovettore della derivata allora $s_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di A. Infatti x è autovettore di $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ se e solo se $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t] = \lambda x$. D'altra parte $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t] = Ax$ e quindi x è autovettore se e solo se $\lambda x = Ax$, e ciò è possibile se e solo se $\lambda\exp(At)x_0 = A\exp(At)x_0$. Ora se $[A,\exp(At)] = 0$, allora $\lambda\exp(At)x_0 = A\exp(At)x_0$ se e solo se $\exp(At)\lambda x_0 = \exp(At)Ax_0$, e questo è vero se e solo se $\lambda x_0 = Ax_0$ ovvero se e solo se x_0 è autovettore di A. Rimane dunque da mostrare che $[A, \exp(At)] = 0$.

$$
\begin{aligned}
A\exp(At) &= A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \\
&= A \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^t}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} A \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^t}{k!} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^t}{k!} \right) A \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right) A \\
&= \exp(At)A
\end{aligned}
$$