Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
Tutorato III - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Osserviamo che A si scrive facilmente come somma di una matrice diagonale e una nilpotente, ovvero

$$A = S + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ma si vede che $[S, N] \neq 0$ e quindi questa decomposizione non permette di risolvere il problema del calcolo dell'esponenziale di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - 1$$

quindi $\Sigma(A) = \{1, -1\}$. Ora $E^*(1) = Ker(A - \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

e quindi $E^*(1) = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Invece $E^*(-1) = Ker(A + \mathbb{1})$ è dato da

$$\{ 2x + 2y = 0$$

e dunque $E^*(-1) = \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Avremo quindi

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = Q^{-1}$$

e osserviamo che $A = Q^{-1} \widetilde{S} Q$ e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1} \exp(\widetilde{S}t) Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione è quindi data da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \exp(-As) B(s) \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \begin{pmatrix} (3t+1)e^{-t}t - 2te^t \\ 2te^{-t} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - (5t+2)\cosh t + (t+6)\sinh t \\ 2(1 + (t-1)e^t) \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - (5t+2)\cosh t + (t+6)\sinh t \\ 3 + 2(t-1)e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5e^t - 3e^{-t} - 5t - 1 \\ 3e^{-t} + 2t - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 2. Cominciamo considerando il caso semplice in cui $\varepsilon = 0$. In questo caso infatti avremo

$$\begin{cases} \ddot{x} = x \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

e considerata la sostituzione $\dot{x} = y$ troviamo quindi il sistema lineare

$$\dot{\xi} = A\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $\xi(0) = (0,1)$.Il polinomio caratteristico di A è dato iniziale

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - 1$$

e quindi $\Sigma(A) = \{1, -1\}$. Gli autospazi sono quindi

$$\begin{aligned} E^*(1) &= \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\} \\ E^*(-1) &= \{(t,-t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

perciò

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che $A = Q^{-1}\widetilde{S}Q$ e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\widetilde{S}Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy, che è data dalla prima riga del vetore $\xi(t)$ è

$$x(t) = \sinh t$$

Vediamo quindi il caso $\varepsilon > 0$. Di nuovo considerando la sostituzione $\dot{x} = y$ il sistema lineare non omogeneo

$$\dot{\xi} = A\xi + B(t), \qquad \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \sin t \end{pmatrix}$$

In questo caso il polinomio caratteristico del sistema omogeneo associato è

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda - 1$$

quindi $\Sigma(A) = \{-\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2, -\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2\}$ che sono reali e distinti indipendentemente dal valore assunto da ε; calcoliamo quindi gli autospazi. $E^*(-\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2)$ è dato da

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}\right) x_1 + x_2 = 0 \\[2ex] x_1 + \left(-\dfrac{3\varepsilon}{2} - \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}\right) x_2 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$E^*(-\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2) = \left\{ \left(t, -\frac{\varepsilon}{2}t + \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}t\right) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

e analogamente

$$E^*(-\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2) = \left\{ \left(t, -\frac{\varepsilon}{2}t - \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}t\right) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Avremo quindi

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} -\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 & -\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \end{pmatrix}$$

e si vede che $A = Q^{-1}\widetilde{(S)}Q$ e quindi

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}\left(\varepsilon e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4}\left(1+e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}\right)\right)}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & \frac{e^{-(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}-e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \\ \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}\left(e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}-1\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} & \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}\left(\varepsilon-\varepsilon e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}+\sqrt{\varepsilon^2+4}\left(1+e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}\right)\right)}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\xi(t) = \exp(At)\left(\xi_0 + \int_0^t \mathrm{d}s \exp(-As)B(s)\right)$$

da cui troviamo che la soluzione del problema di Cauchy corrisponde alla prima riga del vettore $\xi(t)$, ovvero

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{e^{(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})\frac{t}{2}}}{2(4+\varepsilon^2)^{3/2}} &\left((8+4\varepsilon+2\varepsilon^2+\varepsilon^3)\left(e^{\sqrt{4+\varepsilon^2}}-1\right)+\varepsilon^2\sqrt{4+\varepsilon^2}\left(e^{\sqrt{4+\varepsilon^2}}+1\right)\right) \\ &- \frac{e^{(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})\frac{t}{2}}}{2(4+\varepsilon^2)^{3/2}}\left(2\varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2}e^{(\varepsilon+\sqrt{4+\varepsilon^2})\frac{t}{2}}(\varepsilon\cos t + 2\sin t)\right) \end{aligned}$$

<u>Esercizio 3.</u> Il polinomio caratteristico dell'equazione è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2-1} \qquad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$$

caso 1. $|\alpha| > 1$. In questo caso la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

e sostituendo il dato iniziale troviamo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ x(2\pi) = c_1 e^{2\lambda_1\pi} + c_2 e^{2\lambda_2\pi} = 0 \end{cases}$$

e questo è possibile se e solo se $c_1 = c_2 = 0$, quindi l'unica soluzione è la soluzione identicamente nulla.

caso 2. $|\alpha| = 1$. In questo caso la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 t e^{-\alpha t}$$

e sostituendo il dato iniziale troviamo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(2\pi) = c_1 e^{-2\alpha\pi} + 2c_2\pi e^{-2\alpha\pi} \end{cases}$$

e di nuovo troviamo $c_1 = c_2 = 0$ ovvero la soluzione identicamente nulla.

caso 3. $|\alpha| < 1$. In questo caso scriviamo gli autovalori nella forma

$$\lambda_\pm = a \pm ib, \qquad a = -\alpha, \quad b = \sqrt{1-\alpha^2}$$

quindi la soluzione generale sarà

$$x(t) = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$$

Sostituendo il dato iniziale avremo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(2\pi) = e^{2a\pi}(c_1 \cos 2b\pi + c_2 \sin 2b\pi) \end{cases}$$

e quini avremo una soluzione non nulla per $b \neq 1/2 + k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, ovvero avremo una soluzione non nulla per

$$|\alpha| < 1, \qquad \sqrt{1-\alpha^2} \neq \frac{1}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e la soluzione sarà

$$x(t) = ce^{-\alpha t} \sin(\sqrt{1-\alpha^2}t), \quad c \in \mathbb{R}$$

<u>Esercizio 4.</u> L'equazione omogenea associata è

$$t^2\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

e considerata la sostituzione $\dot{x} = y$ troviamo

$$t^2\dot{y}_0 + y_0 = 0$$

e risolvendo per separazione di variabili otteniamo la soluzione generale nella forma

$$y_0(t) = ce^{1/t}$$

Sia quindi

$$y^*(t) = c(t)e^{1/t}$$

allora

$$t^2 + \dot{y}^* + y^* = \dot{c}t^2 + e^{1/t} = t^3$$

e di nuovo, risolvendo per separazione di variabili otteniamo

$$c(t) = \int_1^t \mathrm{d}s\, e^{1/s} s$$

quindi

$$y(t) = \left(c + \int_1^t \mathrm{d}s\, e^{1/s} s\right) e^{1/t}$$

e imponendo il dato iniziale troviamo

$$y(1) = ce = 1 \qquad c = e^{-1}$$

dunque

$$y(t) = \left(e^{-1} + \int_1^t \mathrm{d}s\, e^{1/s} s\right) e^{1/t}$$

A questo punto la soluzione del problema di Cauchy sarà

$$x(t) = 1 + \int_1^t \mathrm{d}s \left(e^{-1} + \int_1^s \mathrm{d}\tau\, e^{1/\tau} \tau\right) e^{1/\tau}$$

<u>Esercizio 5.</u> Considerata la sostituzione $\dot{x} = ty$ avremo

$$\begin{cases} t\dot{y} = \sin y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$y(t) = 2\mathrm{arcctg}\left(\frac{\mathrm{ctg}(1)}{t}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= -1 + 2\int_1^t \mathrm{d}s \,\mathrm{arcctg}\left(\frac{\mathrm{ctg}(1)}{s}\right) s \\ &= -3 + 2t\,\mathrm{arctg}(t\,\mathrm{tg}(1)) + \mathrm{ctg}(1)\ln 2 - \mathrm{ctg}(1)\ln(1+\cos(2)+2\mathrm{t}^2\sin^2(1)) \end{aligned}$$

<u>Esercizio 6.</u> Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = (1+\lambda)(3+\lambda)$$

dunque $\Sigma(A) = \{-1,-3\}$ e si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned} E^*(-1) &= \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\} \\ E^*(-3) &= \{(t,-4t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

da cui ricaviamo gli autovettori

$$v_1 = (1,0) \qquad v_2 = (1,-4)$$

e quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\exp(At) = Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q = \begin{pmatrix} e^{-t} & (e^{-t}-e^{-3t})/4 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

e quindi la soluzione è

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{01}e^{-t} + (e^{-t}-e^{-3t})x_{02}/t \\ x_{02}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Nella base degli autovettori la soluzione è

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_{01}e^{-t} \\ \xi_{02}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

e quindi se $\xi(0) = 0$ la soluzione è $\xi(t) \equiv 0$, e più in generale se $\xi_{0i} = 0$ la soluzione giace sull'asse ξ_j con $j \neq i$. Se invece $\xi_{01}\xi_{02} \neq 0$ allora notiamo che

$$\xi_2 = \frac{\xi_{01}}{\xi_{02}}\xi_1^3$$

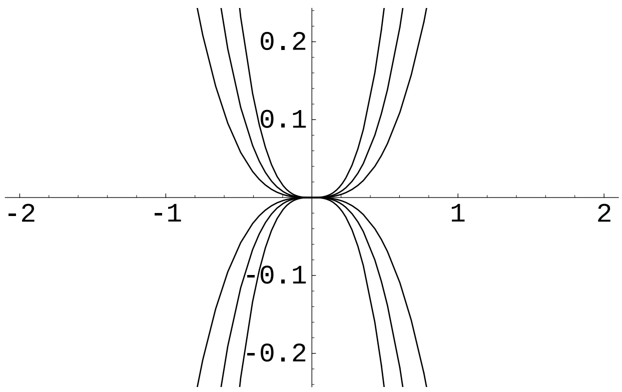

Figura 1: Grafico qualitativo del flusso del sistema.

<u>Esercizio 7.</u> Considerata la sostituzione $\dot{x} = y$ sappiamo che lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

si può scrivere come

$$\Sigma = \{\xi(t) \in C^\infty \ : \ \xi(t) = \exp(At)\xi_0,\, \xi_0 \in \mathbb{R}^2\}$$

dove

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le soluzioni sono tutte e sole della forma

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{pmatrix}$$

al variare di ξ_{01}, ξ_{02} in $\mathbb{R}$. Allora le soluzioni dell'equazione differenziale sono tutte e sole della forma

$$x(t) = \xi_{01} \cos t + \xi_{02} \sin t$$

Notiamo quindi che, se si considera l'isomorfismo naturale tra Σ e $\mathbb{R}^2$ la base stanard $\{e^{(1)}, e^{(2)}\}$ di $\mathbb{R}^2$ corrisponde ai vettori di Σ dati da $\xi_1(t) = \exp(At)e^{(1)}$, $\xi_2(t) = \exp(At)e^{(2)}$ e da questa troviamo quindi una base per lo spazio S delle soluzioni dell'equazione differenziale. In questo caso particolare avremo quindi che una base (naturale) è data da $\{\cos t, \sin t\}$.