**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007**

# FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato IV - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

(1.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x, y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo quindi

$$H(x, y) = \int \mathrm{d}y 2xy = xy^2 + f(x)$$

con $f(x)$ ancora da determinare. Derivando rispetto a $x$ otteniamo

$$-\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} = y^2 + f'(x)$$

e quindi deve valere $f'(x) = 3x^2 - 1$ ovvero $f(x) = x^3 - x + c$ dove $c$ è una costante arbitraria che per comodità imponiamo essere nulla. Allora una costante del moto è

$$H(x, y) = xy^2 + x^3 - x$$

(1.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ 1 - 3x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo $x = 0$ e $y = 0$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda avremo $y = \pm 1$, mentre sostituendo $y = 0$ troviamo $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema sono

$$P_1 = (0, 1) \quad P_2 = (0, -1) \quad P_3 = (1/\sqrt{3}, 0) \quad P_4 = (-1/\sqrt{3}, 0)$$

**Stabilità dei punti d'equilibrio.** La matrice del sistema linearizzato è, in ogni punto,

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -6x & -2y \end{pmatrix}$$

In particolare avremo quindi

$$A(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori $\lambda_{\pm} = \pm 2$ e quindi $P_1$ è instabile. Analogamente

$$A(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi anche $P_2$ è instabile. Invece

$$A = (1/\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{3} \\ -6/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_{\pm} = \pm 2i$ e dunque non possiamo determinare la stabilità di $P_3$ dal sistema linearizzato. Allo stesso modo

$$A = (-1/\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{3} \\ 6/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ha gli stessi autovalori di $A(1/\sqrt{3},0)$ e quindi neanche in questo caso il sistema linearizzato ci consente di decidere la natura del punto d'equilibrio. D'altra parte se calcoliamo la matrice hessiana della costante del moto troviamo

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

quindi in particolare $det(\mathcal{H}(\pm 1/\sqrt{3},0)) = 4$ e $\mathcal{H}_{11}(\pm 1/\sqrt{3},0) = \pm 6/\sqrt{3}$ e quindi $(1/\sqrt{3},0)$ è un punto di minimo per $H(x,y)$ mentre $(-1/\sqrt{3},0)$ è un punto di massimo. Osserviamo quindi che $W_1(x,y) = H(x,y) - H(P_3)$ soddisfa le prime due ipotesi del teorema di Ljapunov per $P_3$ mentre $W_2(x,y) = H(P_4) - H(x,y)$ le soddisfa per $P_4$ e quindi i due punti sono stabili.

(1.3)**Curve di livello.** Notiamo intanto che $H(P_i) = 0 \ \forall\, i = 1,2$ e quindi studiamo la curva

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x(x^2+y^2-1) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

con $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0\}$, $\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 = 1\}$ perciò avremo 5 possibili traiettorie di cui 2 punti instabili, e 5 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

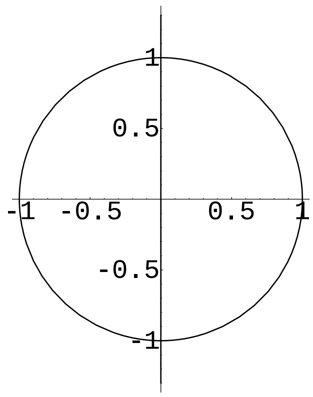


Figura 1: Grafico della curva di livello $\Gamma_0$

**Versi di percorrenza.** Vediamo immediatamente che lungo $\mathcal{C}_1$ si ha

$$\dot{y} = 1 - y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |y| < 1$$

Lungo $\mathcal{C}_2$ invece si ha

$$\dot{y} = -2x^2 < 0 \qquad \forall x$$

Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello, con i rispettivi versi di percorrenza, per dipendenza continua e differenziabile dal dato iniziale.

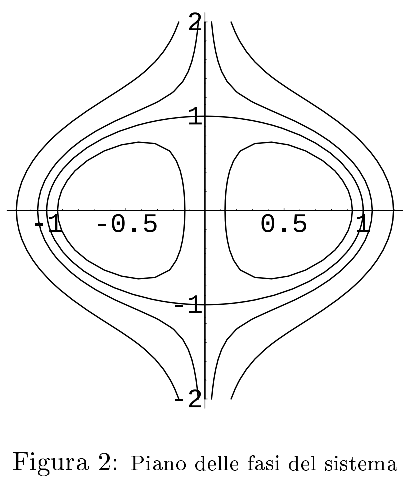


Figura 2: Piano delle fasi del sistema

(1.4) **Traiettorie periodiche.** Sappiamo che se esiste una regione $U$ che sia racchiusa all'interno di una componente connesa di una curva di livello chiusa di $H$ e contenga un unico punto d'equilibrio $x_0$ che sia stabile, allora ogni traiettoria $\varphi(t, \overline{x})$, con $\overline{x} \in U \backslash \{x_0\}$ è periodica e si svolge su un orbita che contiene $x_0$ al suo interno. Quindi gli insiemi dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \, x^2 + y^2 < 1\}$$
$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, \, x^2 + y^2 < 1\}$$

(1.5) **Soluzione esplicita.** Osserviamo immediatamente che il dato iniziale si trova su $C_1$ dove vale $\dot{x} = 0$ e quindi $x(t) \equiv \overline{x} = 0$. Dobbiamo quindi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = 1 - y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

che si risolve facilmente per separazione di variabili, e quindi

$$y(t) = \frac{1 + 3e^{2t}}{3e^{2t} - 1}$$

Esercizio 2.
(2.1) **Costante del moto.** Affinché $H(x, y)$ sia costante del moto, deve valere $\dot{H} = 0$. Tenuto conto che la derivata totale di $H(x, y)$ è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x, y) = \langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle$$

e osservando che valgono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

vediamo immeditamente che $\dot{H} = 0$.
(2.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 8x^3(x^2 - 4)(x^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

che notiamo essere disaccoppiato e le soluzioni sono nei punti

$$P_0 = (0, 0) \quad P_1 = (2, 0) \quad P_2 = (-2, 0) \quad P_3 = (\sqrt{2}, 0) \quad P_4 = (-\sqrt{2}, 0)$$

che sono tutti e soli i punti d'equilibrio del sistema.
**Stabilità dei punti d'equilibrio.** La matrice del sistema linearizzato è, in ogni punto,

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8x^2(7x^4 - 30x^2 + 24) & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo quindi che

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha entrambi gli autovalori uguali a zero e quindi il sistema linearizzato non ci aiuta a stabilire la natura di $P_0$. D'altra parte

$$A(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 512 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_{\pm} = \pm 32$ e dunque entrambi i punti $P_1$ e $P_2$ sono instabili. Infine

$$A(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -128 & 0 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono $\lambda_{pm} = \pm 16i$ quindi di nuovo non riusciamo a stabilire la natura dei punti $P_3$ e $P_4$. D'altra parte la matrice hessiana di $H$ è

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -8x^2(7x^4 - 30x^2 + 24) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi in particolare $det(\mathcal{H}(\pm\sqrt{2}, 0)) = 256 > 0$ e $\mathcal{H}_{11} = 128 > 0$ quindi i punti $P_3$, $P_4$ sono entrambi punti di minimo per $H$. Inoltre $H(P_3) = H(P_4) = -16$ e dunque la funzione $W(x, y) = H(x, y) + 16$ è funzione di Ljapunov per entrambi i punti che quindi sono stabili. Per quanto riguarda $P_0$ invece, abbiamo

$$\mathcal{H}(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $P_0$ è un punto di sella per $\mathcal{H}$ quindi non possiamo ancora dire se si tratta di un punto stabile oppure no. Cercheremo quindi un approccio grafico.
(2.3) **Curve di livello.** Poiché $H(P_i) = 0 \; \forall\, i = 1, 2$ studiamo per prima la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; (y - x^2(x^2 - 4))(y + x^2(x^2 - 4)) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

Dove le curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ sono

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = x^2(x^2 - 4)\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = -x^2(x^2 - 4)\}$$

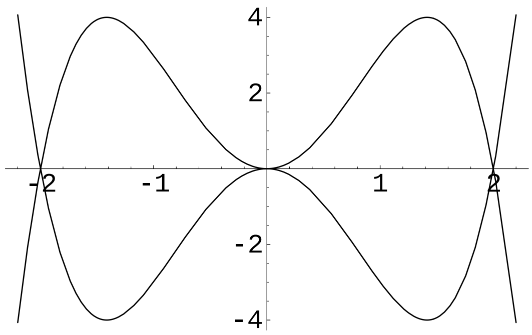


Figura 3: Grafico della curva di livello $\Gamma_0$

**Versi di percorrenza.** Notiamo che lungo ogni curva di livello si ha $\dot{x} > 0$ se e solo se $y > 0$ quindi avremo verso di percorrenza da sinistra verso destra in $x$ in tutto il semipiano superiore, e al contrario lungo il semipiano inferiore. A questo punto possiamo dire che il punto $P_0$ è un punto d'equilibrio instabile dato che esiste una direzione lungo cui ci si allontana da esso. Possiamo quindi ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello, con i rispettivi versi di percorrenza, per dipendenza continua e differenziabile dal dato iniziale.

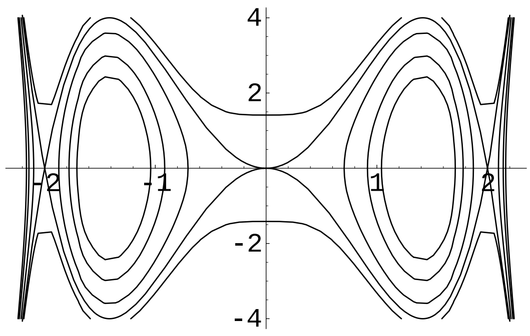


Figura 4: Piano delle fasi del sistema

(1.4) **Traiettorie periodiche.** Per gli stessi argomenti usati in (1.4) gli insiemi dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 < x < 0, \ x^2(x^2-4) < y < -x^2(x^2-4)\}$$
$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 2, \ x^2(x^2-4) < y < -x^2(x^2-4)\}$$

<u>ESERCIZIO 3.</u>
(3.1) **Costante del moto.** Affinché $H(x, y)$ sia costante del moto, deve valere $\dot{H} = 0$. Tenuto conto che la derivata totale di $H(x, y)$ è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x, y) = \langle \nabla H, (\dot{x}, \dot{y})\rangle$$

e osservando che valgono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

vediamo immeditamente che $\dot{H} = 0$.
(3.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2y(x^4 - 2x^2y^2 + 1) = 0 \\ -2x(2x^2y^2 - y^4 - 1) = 0 \end{cases}$$

Intanto vediamo che se $x = 0$ allora $y = 0$ e viceversa. Se invece $xy \neq 0$ scriviamo

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + 1 = 0 \\ 2x^2y^2 - y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

che sommate danno $x^4 - y^4 = 0$ ovvero $|x| = |y|$. sostituendo in una delle due (ad esempio la seconda) avremo $x^4 - 1 = 0$ ovvero $x = \pm 1$ e quindi i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 1), \quad P_2 = (1, -1), \quad P_3 = (-1, 1), \quad P_4 = (-1, -1)$$

**Stabilità dei punti d'equilibrio.** La matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy(x^2 - y^2) & 2(x^4 - 6x^2y^2 + 1) \\ 2(y^4 - 6x^2y^2 + 1) & -8xy(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

Avremo quindi che

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$ quindi $P_0$ è instabile. D'altra parte

$$A(P_i) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$, e gli autovalori sono $\lambda_\pm = \pm 2\sqrt{2}$ quindi anche i punti $P_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$ sono instabili.
(3.3) **Curve di livello.** Notiamo immediatamente che $H(P_i) = 0 \ \forall\, i = 0, \ldots, 4$ quindi studiamo per prima la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x^2y^2 - 1)(x^2 - y^2) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$$

dove

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -x\}$$
$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1/x\}$$
$$\mathcal{C}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -1/x\}$$

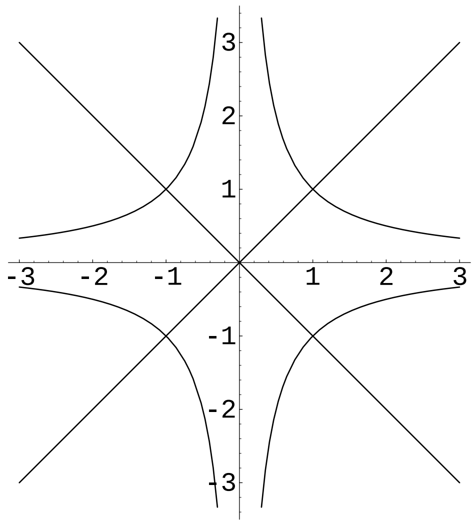


Figura 5: Grafico della curva di livello $\Gamma_0$

**Versi di percorrenza.** Si vede facilmente che lungo $\mathcal{C}_1$ si ha $\dot{x} = 2x(1-x^4)$ e quindi $\dot{x} > 0$ se $x < -1$ oppure $0 < x < 1$ e negativo altrimenti. Viceversa lungo $\mathcal{C}_2$ si ha $\dot{x} = 2x(x^4 - 1)$ e quindi $\dot{x} > 0$ se $x > 1$ oppure $-1 < x < 0$ e negativo altrimenti. Lungo $\mathcal{C}_3$ si ha $\dot{x} = 2(x^4 - 1)/x$ e quindi $\dot{x} > 0$ per $x > 1$ e $-1 < x < 0$ e negativo altrimenti. Infine lungo $\mathcal{C}_4$ si ha $\dot{x} = 2(1 - x^4)/x$ e dunque $\dot{x} > 0$ per $x < -1$ oppure $0 < x < 1$ e negativo altrimenti. Possiamo quindi ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello, con i rispettivi versi di percorrenza, per dipendenza continua e differenziabile dal dato iniziale.

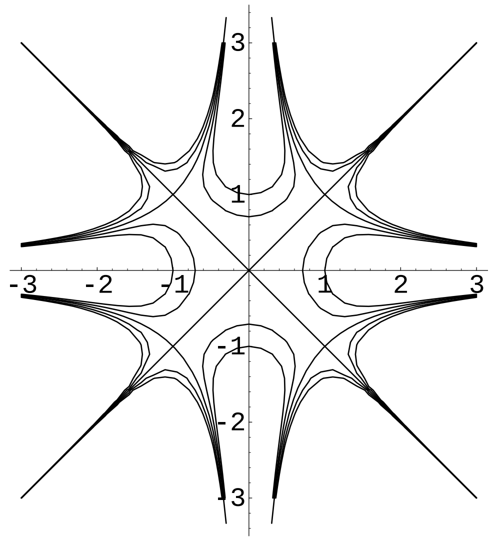


Figura 6: Piano delle fasi del sistema

(3.4) **Traiettorie periodiche.** Una traiettoria periodica si svolge su un'orbita chiusa: mostriamo quindi che non possono esistere orbite chiuse. La curva di livello $\Gamma_0$ divide il piano in regioni aperte sconnesse. In tali regioni il segno di una delle due componenti del campo vettoriale ($\dot{x}$ oppure $\dot{y}$) ha sempre lo stesso segno, tranne che nelle regioni

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1, \, |x| < y < 1/|x|\} \\
\mathcal{A}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1, \, -1/|x| < y < -|x|\} \\
\mathcal{A}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| < 1, \, |y| < x < 1/|y|\} \\
\mathcal{A}_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| < 1, \, -1/|y| < x < -|y|\}
\end{aligned}$$

Però nelle regioni $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ si ha che $\dot{y} < 0$ per $x < 0$ e $\dot{y} > 0$ per $x > 0$; inoltre le traiettorie attraversano l'asse $x = 0$ una sola volta. Quindi anche in tali regioni le traiettorie non si possono chiudere. Un ragionamento analogo si può fare per le regioni $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$ dove si ha $\dot{x} > 0$ per $y > 0$ e $\dot{x} < 0$ per $y < 0$ e le traiettorie attraversano l'asse $y = 0$ una sola volta.