Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
Tutorato V - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

(1.1) **Costante del moto.** Affinché $H(x,y)$ sia costante del moto, deve valere $\dot{H}=0$. Tenuto conto del fatto che la derivata totale di $H(x,y)$ è

$$\frac{d}{dt}H(x,y)=\langle \nabla H,(\dot{x},\dot{y})\rangle$$

e osservando che valgono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y}=\dot{x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dot{y} \end{cases}$$

notiamo immediatamente che $\dot{H}=0$.

(1.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2y(2y^2-e^{2x}-e^{-2x})=0 \\ 2y^2(e^{-2x}-e^{2x})=0 \end{cases}$$

Vediamo immediatamente che $y=0$ è soluzione per ogni valore di x quindi si tratterà di una retta di punti d'equilibrio. Se invece $y\neq 0$ nella seconda abbiamo

$$e^{-2x}=e^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad x=0$$

e sostituendo nella prima troviamo $y^2-1=0$ ovvero $y=\pm 1$. Pertanto il sistema avrà equilibrio in

$$P_+=(0,1), \quad P_-=(0,-1), \quad r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=0\}$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è, in ogni punto

$$A(x,y)=\begin{pmatrix} -4y(e^{2x}-e^{-2x}) & 2(6y^2-e^{-2x}-e^{2x}) \\ 4y^2(e^{-2x}+e^{2x}) & 4y(e^{2x}-e^{-2x}) \end{pmatrix}$$

In particolare avremo quindi

$$A(0,\pm 1)=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm=\pm 2\sqrt{2}$ e quindi $P_\pm$ sono punti instabili per il sistema. Per quanto riguarda la retta r invece, abbiamo

$$A(r)=\begin{pmatrix} 0 & -2(e^{2x}+e^{-2x}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi non possiamo determinarne la stabilità dal sistema lineare. Rimandiamo a dopo la discussione della stabilità di tali punti d'equilibrio.

(1.3) **Curve di livello.** Notiamo intanto che $H(P_\pm)=-1$ e quindi studiamo per prima la curva

$$\Gamma_{-1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y^4-y^2(e^{2x}+e^{-2x})+1=0\}$$

Notiamo che possiamo scrivere, in modo più conveniente,

$$H(x,y)+1=y^4-y^2(e^{2x}+e^{-2x})+e^{2x}e^{-2x}=(y^2-e^{2x})(y^2-e^{-2x})$$

quindi avremo che $\Gamma_{-1}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2\cup\mathcal{C}_3\cup\mathcal{C}_4$ dove

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=e^{x}\} \\ \mathcal{C}_2&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=e^{-x}\} \\ \mathcal{C}_3&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=-e^{x}\} \\ \mathcal{C}_4&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=-e^{-x}\} \end{aligned}$$

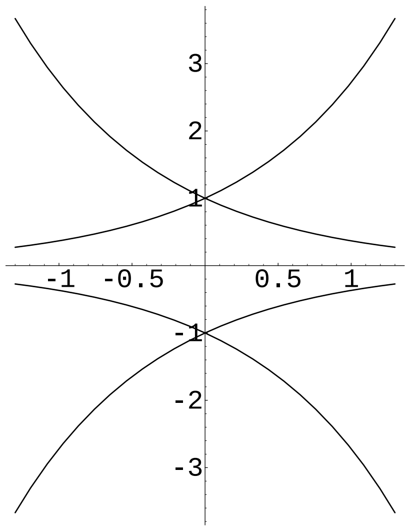

Figura 1: Grafico della curva di livello Γ_{-1}

Versi di percorrenza. Lungo $\mathcal{C}_1$ si ha $\dot{x} = 2e^x(e^{2x} - e^{-2x})$ e quindi $\dot{x} > 0$ per $x > 0$ e negativo altrimenti. Lungo $\mathcal{C}_2$ avremo $\dot{x} = 2e^{-x}(e^{-2x} - e^{2x})$ e dunque $\dot{x} > 0$ per $x < 0$ e negativo altrimenti. Lungo $\mathcal{C}_3$ si ha $\dot{x} = -2e^x(e^{2x} - e^{-2x})$ e quindi $\dot{x} > 0$ per $x < 0$, e infine lungo $\mathcal{C}_4$ si ha $\dot{x} = -e^{-x}(e^{-2x} - e^{2x})$ e quindi $\dot{x} > 0$ per $x > 0$ e negativo altrimenti. Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello, con i rispettivi versi di percorrenza, per dipendenza continua e differenziabile dale dato iniziale.

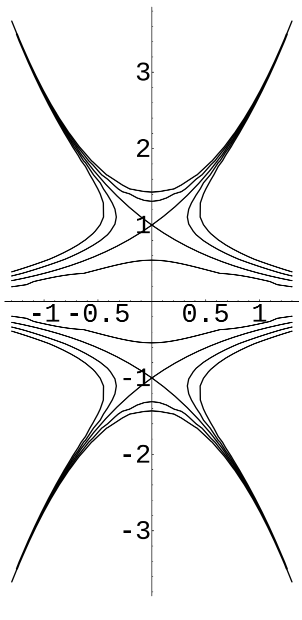

Figura 2: Piano delle fasi del sistema

Stabilità della retta r**.** Dall'analisi qualitativa discussa ai punti precedenti si vede in particolare che esistono orbite vicino quanto si vuole all'asse $y = 0$. Comunque si consideri un intorno B di un punto $(x, 0)$ e un sato iniziale $(\overline{x}, \overline{y}) \in B$ si vede che la traiettoria con quel dato iniziale si avvicina all'asse $y = 0$ sia nel passato sia nel futuro in modo tale che risulti $x(t) \to \pm\infty$, e quindi esce dall'intorno B in un tempo finito. Questo implica che i punti d'equilibrio sulla retta r sono tutti punti d'equilibrio instabile.

(1.4) **Assenza di traiettorie periodiche.** Vediamo il piano come unione della curva di livello Γ_{-1}

con le regioni (illimitate) in cui essa lo sconnette. Ad eccezione della regione

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -e^x < y < e^x,\, x \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -e^{-x} < y < e^{-x},\, x > 0\}$$

è immediato vedere che nelle altre regioni tutte le traiettorie hanno almeno una direzione in cui la velocità cresce asintoticamente e quindi non possono esserci traiettorie periodiche. Nella regione $\mathcal{A}$ si può usare lo stesso argomento visto per la discussione della stabilità della retta d'equilibrio.

ESERCIZIO 2.
(2.1) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema $\nabla V = 0$, ovvero

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

quindi i punti d'equilibrio saranno

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (\pi, 0)$$

Stabilità. La matrice del sistema linearizzato è, in ogni punto

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

In particolare avremo quindi

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale e gli autovalori sono entrambi reali strettamente minori di zero e quindi P_0 è asintoticamente stabile. Per quanto riguarda P_1 abbiamo

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e poiché uno degli autovalori è strettamente positivo, P_1 è instabile.
(2.2) **Curve di livello.** Cfr. Cap 5, §23 delle dispense. Le curve di livello di V sono infatti qualitativamente simili a quelle del pendolo matematico. Per quanto riguarda le traiettorie invece, sappiamo che nei punti regolari del sistema si ha che ∇V è ortogonale alle curve di livello di V. Perciò poiché le velocità sono uguali a $-\nabla V$ in ogni punto, le traiettorie saranno ortogonali alle curve di livello d V e saranno dirette in senso opposto al gradiente.
(2.3) **Bacino d'attrazione.** Per stimare il bacino d'attrazione consideriamo la funzione

$$W(x,y) = V(x,y) - V(0,0) = y^2 + 1 - \cos x$$

dato che si verifica facilmente che W è funzione di Ljapunov per P_0. Dal teorema di Barbašin-Krasovskij sappiamo che un qualunque compatto K chiusura di un aperto tale che $P_0 \in K$, positivamente invariante e non esistono traiettorie in $K \backslash \{P_0\}$ costituite unicamente dai punti z in cui $\dot{W}(z) = 0$ allora K è contenuto nel bacino d'attrazione di P_0. Ma allora con V come funzione di Ljapunov, ogni compatto che non intersechi la retta (π, y) soddisfa le ipotesi di Barbašin-Krasovskij quindi il bacino d'attrazione è dato da $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \backslash \{(\pi, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}\}$

ESERCIZIO 3. (3.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x,y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo quindi

$$H(x,y) = \int \mathrm{d}y\, (4y^3 - 8y) = y^4 - 4y + f(x)$$

con $f(x)$ ancora da determinare. Derivando rispetto a x otteniamo

$$-\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} = f'(x)$$

e quindi deve valere $f'(x) = 8x - 4x^3$ ovvero $f(x) = 4x^2 - x^4$ dove c è una costante arbitraria che per comodità imponiamo essere nulla. Allora una costante del moto è

$$H(x,y) = y^4 - 4y^2 + 4x^2 - x^4$$

(3.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 4y(y^2-2) = 0 \\ 4x(x^2-2) = 0 \end{cases}$$

che trattandosi di un sistema disaccoppiato si risolve semplicemente determinando le soluzioni di ciascuna equazione e considerando quindi tutte le possibili combinazioni di tali soluzioni, ovvero nel nostro caso abbiamo

$$P_0 = (0,0), \quad P^1_\pm = (0, \pm\sqrt{2}) \quad P^2_\pm = (\pm\sqrt{2}, 0)$$
$$P^3_\pm = (\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}), \quad P^4_\pm = (\pm\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Stabilità. La matrice del sistema linearizzato è, in ogni punto,

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 12y^2 - 8 \\ 12x^2 - 8 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi in particolare

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm = \pm 8$ quindi il punto è instabile. Per quanto riguarda $P^1_\pm$ si ha

$$A(P^1\pm) = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm = \pm 8\sqrt{2}i$ quindi non possiamo decidere la stabilit1'a di questi punti con il solo linearizzato. Allo stesso modo si vede che anche per i punti $P^2_\pm$ il linearizzato non è sufficiente per determinare la stabilità: infatti basta scambiare il ruolo di x e y. Per quanto riguarda invece i punti $P^3_\pm$ e $P^4_\pm$ il avremo

$$A(P^3_\pm) = A(P^4_\pm) = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm = \pm 16$ quindi i punti sono instabili. D'altra parte se calcoliamo la matrice hessiana della costante del moto troviamo

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 8 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 8 \end{pmatrix}$$

quindi in particolare

$$\mathcal{H}(P^1_\pm) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

e quindi la funzione $W_1(x,y) = H(x,y) - H(P^1_\pm)$ è funzione di Ljapunov intorno ai punti $P^1_\pm$ che quindi sono stabili. Analogamente,

$$\mathcal{H}(P^2_\pm) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

e quindi la funzione $W_2(x,y) = H(P^2_\pm) - H(x,y)$ è funzione di Ljapunov intorno ai punti $P^2_\pm$ he quindi sono stabili.

(3.3) **Curve di livello.** Notiamo intanto che $H(P_0) = H(P^3_\pm) = H(P^4_\pm) = 0$ quindi studiamo per prima la curva

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 - 4y^2 + 4x^2 - x^4 = 0\}$$

Vediamo inoltre che possiamo scrivere, in modo più conveniente,

$$H(x,y) = (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - 4(y^2 - x^2) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 4)$$

quindi avremo che $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ dove

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \end{aligned}$$

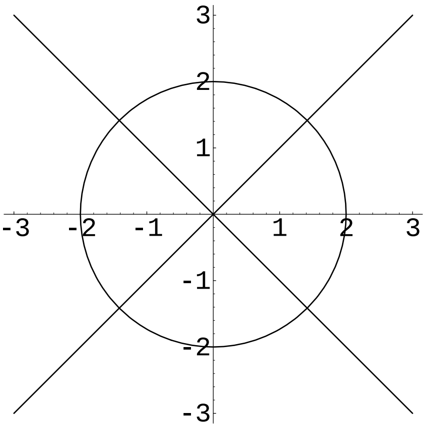

Figura 3: Grafico della curva di livello Γ_0

Versi di percorrenza. Lungo $\mathcal{C}_1$ avremo che $\dot{x} = 4x(x^2 - 2)$ e quindi $\dot{x} > 0$ per $x > \sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} < x < 0$ e negativo altrimenti. Viceversa lungo $\mathcal{C}_2$ si ha $\dot{x} = -4x(x^2 - 2)$ e dunque $\dot{x} > 0$ per $0 < x < \sqrt{2}$ e $x < -\sqrt{2}$ e negativo altrimenti. Lungo $\mathcal{C}_3$ infine avremo che se $y > 0$ allora $\dot{x} > 0$ se $y > \sqrt{2}$ e negativo per $0 < y < \sqrt{2}$; se invece $y < 0$ allora $\dot{x} > 0$ per $-\sqrt{2} < y < 0$ e negativo per $y > -\sqrt{2}$. Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello, con i rispettivi versi di percorrenza, per dipendenza continua e differenziabile dale dato iniziale.

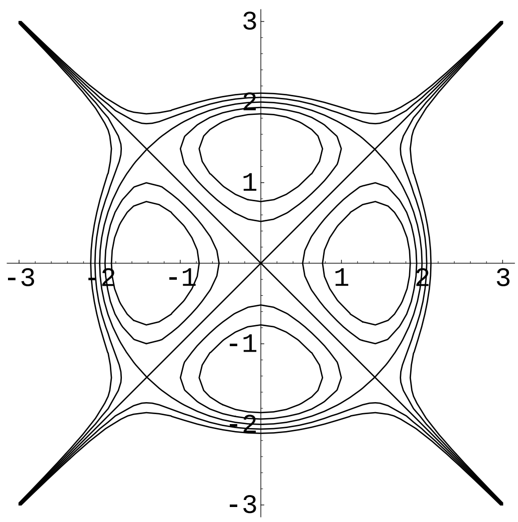

Figura 4: Piano delle fasi del sistema

(3.4) **Traiettorie periodiche.** Sappiamo che se esiste una regione U che sia racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di H e contenga un unico punto d'equilibrio x_0 che sia stabile, allora ogni traiettoria $\varphi(t, \overline{x})$, con $\overline{x} \in U \backslash \{x_0\}$ è periodica e si svolge su un'orbita che contiene x_0 al suo interno. Quindi gli insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|,\ x^2+y^2 < 4\} \\
U_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -|x|,\ x^2+y^2 < 4\} \\
U_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|,\ x^2+y^2 < 4\} \\
U_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -|y|,\ x^2+y^2 < 4\}
\end{aligned}$$

(3.5) **Sistema perturbato.** Il sistema è ora dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2-2) - \alpha x \\ \dot{y} = 4x(x^2-2) - \alpha y \end{cases}$$

e la matrice del linearizzato, intorno all'origine, è quindi

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} -\alpha & -8 \\ -8 & -\alpha \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm = -\alpha \pm 8$ che sono strettamente negativi per $\alpha > \alpha_0 = 8$. Per stimare il bacino d'attrazione mostriamo che la funzione

$$W(x,y) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$$

definita in D soddisfa le tre condizioni del teorema di Ljapunov. Infatti è ovvio che $W(x,y) \geq 0$ e $W(x,y) = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Inoltre in $D \backslash \{(0,0)\}$ si ha

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\
&= x(4y(y^2-2) - \alpha x) + y(4x(x^2-2) - \alpha y) \\
&= 4xy^3 - 8xy - \alpha x^2 + 4x^3y - 8xy - \alpha y^2 \\
&= 4xy(y^2+x^2) - 16xy - \alpha(x^2+y^2) \\
&\leq 16xy - 16xy - 4\alpha \\
&= -4\alpha \\
&< -32
\end{aligned}$$

quindi D è contenuto nel bacino d'attrazione dell'origine.