Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato VII - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

(1.1) **Sistema dinamico associato.** Posto $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = x^2(x^2 - 6x + 6)e^{-x} \end{cases}$$

(1.2) **Intersezioni con gli assi.** Si vede facilmente che $V(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, $x = 2$.
Andamento all'infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} V(x) = +\infty$$

Punti critici. Risolvendo $[\mathrm{d}V/\mathrm{d}x](x) = 0$ troviamo che i punti critici sono $x_0 = 0$ e $x_\pm = 3 \pm \sqrt{3}$. Inoltre si vede che il segno della derivata cambia solo nei punti $x_\pm$ e in particolare $V(x)$ cresce per $3 - \sqrt{3} \le x \le 3 + \sqrt{3}$ quindi x_0 è un punto di minimo, x_+ è un punto di massimo e x_- è una sella.
Grafico del potenziale.

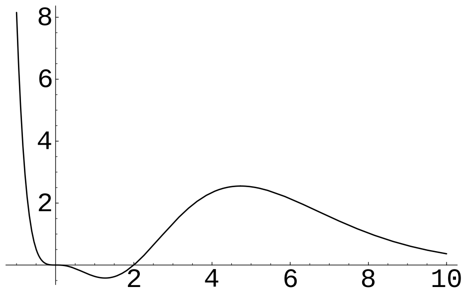

Figura 1: Grafico del potenziale $V(x)$

(1.3) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo in generale che i punti d'equilibrio del sistema sono tutti e soli della forma $(\overline{x}, 0)$ dove $\overline{x}$ è un punto critico del potenziale; quindi in particolare avremo che i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0, 0), \qquad P_- = (3 - \sqrt{3}, 0), \qquad P_+ = (3 + \sqrt{3}, 0)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(\overline{x}, 0)$ con $\overline{x}$ punto di minimo del potenziale, perciò avremo che P_- è stabile mentre P_0 e P_+ sono instabili.

(1.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x; inoltre osserviamo che $x_- = 3 - \sqrt{3}$ è un minimo assoluto del potenziale, quindi il moto nel piano delle fasi sarà possibile solo per $E \ge V(3 - \sqrt{3})$ e le traiettorie saranno definite per ogni tempo; in particolare avremo

- Per $E = V(3 - \sqrt{3})$ il solo punto d'equilibrio stabile P_-.
- Per $V(3 - \sqrt{3}) < E < 0$ una traiettoria periodica intorno al punto stabile P_-.
- Per $E = 0$ una traiettoria omoclina a cuspide intorno a P_- e lo stesso P_-.
- Per $0 < E < V(3 + \sqrt{3})$ una traiettoria periodica intorno a P_- e una aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E = V(3 + \sqrt{3})$ una traiettoria omoclina che si autointerseca trasversalmente in P_+ (si osservi che nel punto x_+ si ha $V''(3 + \sqrt{3}) = -12(3 + 2\sqrt{3})e^{-3-\sqrt{3}} \neq 0$), una traiettoria aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \sqrt{2E}$, una speculare con $\lim_{x+\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$ e il punto instabile P_-.

- Per $E > V(3+\sqrt{3})$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

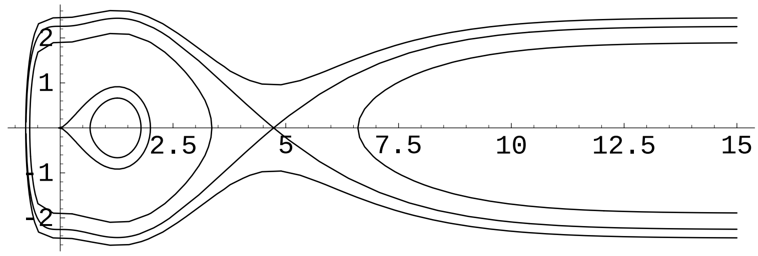

Figura 2: Piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$ sappiamo che il verso di percorrenza nella direzione x sarà positivo nel semipiano $\{y > 0\}$ e negativo altrimenti.

(1.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto prencedente si hanno traiettorie periodiche in

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_m < x < 3+\sqrt{3},\, V(3-\sqrt{3}) < E < V(3+\sqrt{3}),\, E \neq 0\}$$

dove $x_m \neq 3+\sqrt{3}$ è tale che $V(x_m) = V(3+\sqrt{3})$

Esercizio 2.

(2.1) **Sistema dinamico associato.** Posto $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\sin 2x \end{cases}$$

(2.2) Notiamo subito che $V(x) \geq 0$ e $V(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, $x = \pi$.
Punti critici. Risolvendo $[\mathrm{d}V/\mathrm{d}x](x) = 0$ troviamo che i punti critici sono $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$ e $x_\pm = \pm\pi/2$. Derivando una seconda volta troviamo $V''(x) = 2\cos 2x$ e quindi x_0 e x_1 sono punti di minimo mentre $x_\pm$ sono punti di massimo in cui vale $V''(x_\pm) \neq 0$.
Grafico del potenziale.

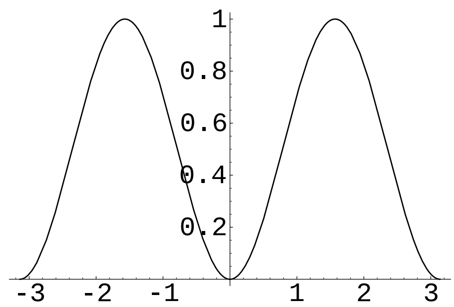

Figura 3: Grafico del potenziale $V(x)$

(2.3) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo in generale che i punti d'equilibrio del sistema sono tutti e soli della forma $(\overline{x}, 0)$ dove $\overline{x}$ è un punto critico del potenziale; quindi in particolare avremo che i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (\pi, 0), \qquad P_+ = (\pi/2, 0), \qquad P_- = (-\pi/2, 0)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(\overline{x}, 0)$ con $\overline{x}$ punto di minimo del potenziale, perciò avremo che P_0 e P_1 sono stabili mentre $P_\pm$ sono instabili.

(2.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x; inoltre osserviamo che il potenziale è limitato dal basso, quindi le traiettorie saranno definite per ogni tempo e in particolare il moto nel piano delle fasi sarà possibile solo per $E \geq 0$. Avremo quindi

- Per $E = 0$ i due punti stabili P_0 e P_1.
- Per $0 < E < 1$ una traiettoria periodica intorno a P_0 e una intorno a P_1.
- Per $E = 1$ quattro traiettorie eterocline che si intersecano trasversalmente e i punti instabili.
- Per $E > 1$ due traiettorie periodiche, una tutta contenuta in $\{y < 0\}$ e l'altra in $\{y > 0\}$.

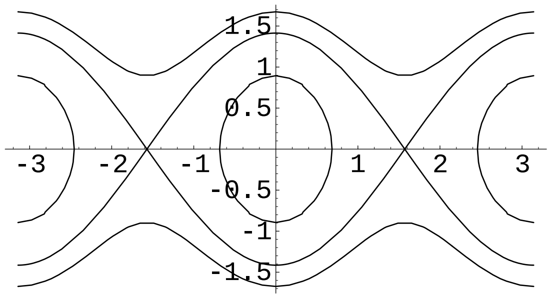

Figura 4: Piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$ sappiamo che il verso di percorrenza nella direzione x sarà positivo nel semipiano $\{y > 0\}$ e negativo altrimenti.

(2.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto prencedente si hanno traiettorie periodiche per ogni dato iniziale eccetto i punti d'equilibrio e la separatrice, ovvero in

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : E \neq 1,\ (x, y) \neq (0, 0),\ (x, y) \neq (\pi, 0)\}$$

(2.6) **Soluzione esplicita.** Sappiamo che deve valere $\dot{x}^2 = 2(1 - \sin^2 x) = 2\cos^2 x$ dalla legge di conservazione dell'energia, e se ad esempio scegliegliamo la traiettoria contenuta in $\{y > 0\}$ avremo $\dot{x} = \sqrt{2}|\cos x|$; Inoltre sappiamo che la soluzione dovrà essere contenuta in $(-\pi/2, \pi/2)$ e in tale intervallo si ha $|\cos x| = \cos x$. Si tratta quindi di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{2}\cos x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Separando le variabili otteniamo

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \sqrt{2}t$$

Inoltre poiché sappiamo che il verso di percorrenza è positivo abbiamo anche $0 < x < \pi/2$. Calcolando l'integrale troviamo

$$\log\left(\frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)}\right) = \sqrt{2}t$$

dunque la soluzione è $x(t)$ definita implicitamente dall'equazione sopra.

ESERCIZIO 3.

(3.1) **Sistema dinmico associato.** Posto $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 2x(x^2 - 2)e^{-x^2} \end{cases}$$

(3.2) Studiamo la funzione $W(x) = V(x) - 1 = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ che si comporta qualitativamente come il potenziale. Vediamo subito che gli unici zeri di $W(x)$ sono in $x = \pm 1$ e che $W(x) < 0$ per $|x| < 1$ e positiva altrimenti; notiamo inoltre che l'andamento all'infinito di $W(x)$ è dato da

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$$

Punti critici. Risolvendo $[\mathrm{d}W/\mathrm{d}x](x) = 0$ troviamo che i punti critici sono $x_0 = 0$ e $x_\pm = \pm\sqrt{2}$. Derivando una seconda volta troviamo $W''(x) = 2(2x^4 - 7x^2 + 2)e^{-x^2}$ e quindi x_0 è un punto di minimo mentre $x_\pm$ sono punti di massimo in cui vale $W''(x_\pm) = -8e^{-2} \neq 0$.

Grafico del potenziale.

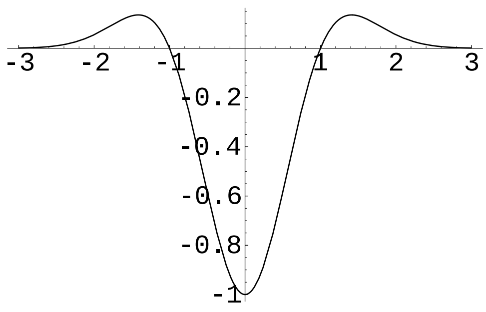

Figura 5: Grafico di $W(x)$

Otteniamo quindi il grafico del potenziale semplicemente considerando una traslazione verso l'alto:

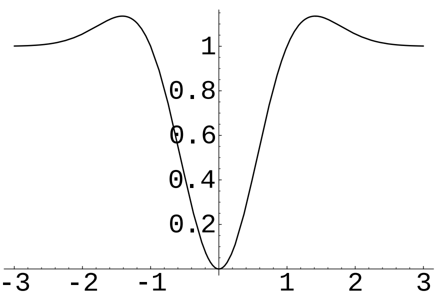

Figura 6: Grafico del potenziale $V(x)$

(3.3) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo in generale che i punti d'equilibrio del sistema sono tutti e soli della forma $(\overline{x}, 0)$ dove $\overline{x}$ è un punto critico del potenziale; quindi in particolare avremo che i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0,0), \qquad P_+ = (\sqrt{2}, 0), \qquad P_- = (-\sqrt{2}, 0)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(\overline{x}, 0)$ con $\overline{x}$ punto di minimo del potenziale, perciò avremo che P_0 è stabile mentre $P_\pm$ sono instabili.

(3.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x; inoltre osserviamo che il potenziale è limitato dal basso, quindi le traiettorie saranno definite per ogni tempo e in particolare il moto nel piano delle fasi sarà possibile solo per $E \geq 0$. Avremo quindi

- Per $E = 0$ il punto stabile P_0.
- Per $0 < E \leq 1$ una traiettoria periodica intorno a P_0.
- Per $1 < E < V(\sqrt{2})$ una traiettoria periodica intorno a P_0, una aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2(E-1)}$ e una aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2(E-1)}$
- Per $E = V(\sqrt{2})$ due traiettorie eterocline che si intersecano trasversalmente, quattro traiettorie aperte di cui una con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \sqrt{2(V(1)-1)}$, una con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\sqrt{2(V(1)-1)}$, una con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \sqrt{2(V(1)-1)}$ e una con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\sqrt{2(V(1)-1)}$, e i punti instabili.

- Per $E > V(\sqrt{2})$ due traiettorie aperte, una tutta contenuta in $\{y < 0\}$ con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \sqrt{2(E-1)}$ e l'altra in $\{y > 0\}$ con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\sqrt{2(E-1)}$.

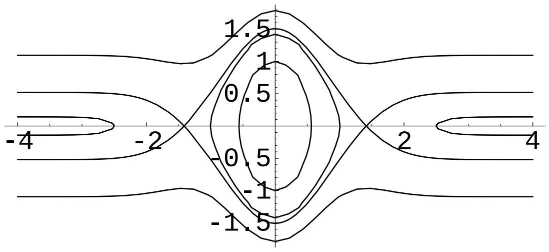

Figura 7: Piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$ sappiamo che il verso di percorrenza nella direzione x sarà positivo nel semipiano $\{y > 0\}$ e negativo altrimenti.

(3.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto prencedente si hanno traiettorie periodiche in

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2},\, 0 < E < V(\sqrt{2})\}$$

(3.6) **Periodo come integrale deinito.** Per quanto visto ai punti precendenti deve esistere una traiettoria periodica per $E = 1$ e possiamo scrivere il periodo come

$$T = \sqrt{2}\int_{x_-}^{x_+} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - V(x)}}$$

dove x_-, x_+ sono le soluzioni di $V(x) = 1$ ovvero gli zeri della funzione $W(x)$ usata precedentemente, quindi $x_\pm = \pm 1$. Avremo pertanto

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)e^{-x^2}}}$$

Stima del periodo. Notiamo che $E - V(x) = -W(x) = (1-x^2)e^{-x^2} = (x+1)(1-x)e^{-x^2}$ che è quindi della forma $(x - x_-)(x_+ - x)\Phi(x)$ con $\Phi(x) = e^{-x^2}$ e inoltre $e^{-1} \leq \Phi(x) \leq 1\ \forall x \in [-1,1]$ perciò una stima del periodo è data da

$$\sqrt{2}\pi \leq T \leq \sqrt{2e}\pi$$

Si osservi che non si tratta certo di una stima ottimale dato che numericamente risulta del tipo

$$4,443 \leq T \leq 7,325$$