

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**  
 TUTORATO VIII - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Equazioni di Newton.** Poiché  $m = 1$  il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{1}{\rho} - \frac{1}{3\rho^3} + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} + \frac{L^2}{\rho^3}$$

**Sistema dinamico associato.**

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(1.2) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione  $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$  vediamo che questa ha soluzione se e solo se  $L^2 \geq 2$ . In particolare avremo quindi

- per  $L^2 < 2$  nessun punto d'equilibrio.
- per  $L^2 = 2$  un solo punto d'equilibrio in  $P_0 = (1, 0)$ .
- per  $L^2 \geq 2$  due punti d'equilibrio in  $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$ , con  $\rho_{\pm} = \frac{1}{2}(L^2 \pm \sqrt{L^4 - 4})$

**Stabilità dei punti d'equilibrio.** Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = -\frac{4}{\rho^5} + \frac{3L^2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^3}$$

quindi se  $L^2 = 2$  avremo che  $[dV_{\text{eff}}/d\rho] > 0 \forall \rho \neq 1$  cioè  $\rho = 1$  è una sella del potenziale, dunque  $P_0$  è instabile. Per  $L^2 > 2$  invece si ha  $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_-) < 0$  quindi  $\rho_-$  è un massimo del potenziale e dunque  $P_-$  è instabile; viceversa  $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_+) > 0$  quindi  $\rho_+$  è un minimo e perciò  $P_+$  è stabile.

(1.3) **Andamento all'infinito.** Indipendentemente dal valore di  $L$  si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

**Grafico del potenziale efficace.**

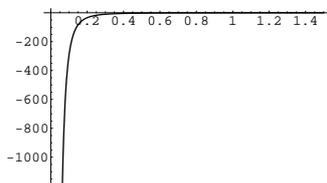


Figura 1: Grafico del potenziale per  $L^2 < 2$

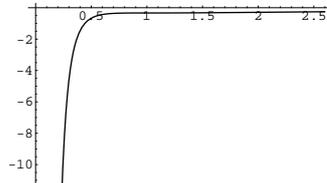


Figura 2: Grafico del potenziale per  $L^2 = 2$

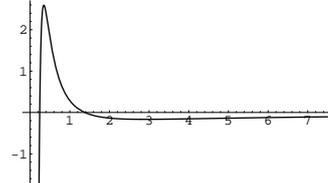


Figura 3: Grafico del potenziale per  $L^2 > 2$

(1.4) **Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Suddividiamo il problema in tre casi.

**Caso 1.**  $L^2 < 2$ .

- Per  $E < 0$  avremo una curva aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E \geq 0$  due traiettorie aperte, una con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \sqrt{2E}$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = +\infty$ , l'altra simmetrica alla prima rispetto all'asse  $\rho$

**Caso 2.**  $L^2 = 2$ .

- Per  $E < V_{\text{eff}}(1)$  avremo una curva aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(1)$  due traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$ , e con  $\lim_{\rho \rightarrow 1} y(\rho) = 0$  con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile  $(1, 0)$ .
- Per  $V_{\text{eff}}(1) < E < 0$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E \geq 0$  due traiettorie aperte, una con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(r) = \sqrt{2E}$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = +\infty$ , l'altra simmetrica alla prima rispetto all'asse  $\rho$

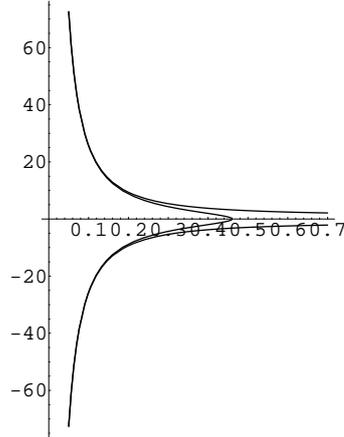


Figura 4: Piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L^2 < 2$

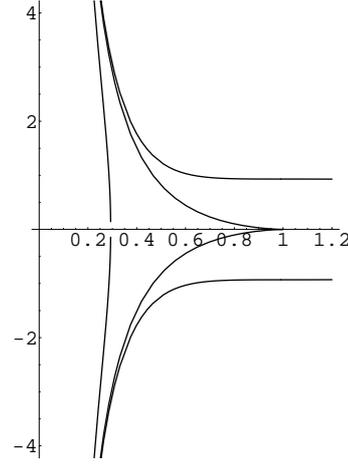


Figura 5: Piano  $(\rho, \dot{\rho})$  per  $L^2 = 2$

**Caso 3.**  $L^2 > 2$ . In questo caso dobbiamo considerare tre sottocasi; infatti risolvendo  $V_{\text{eff}}(\rho_-) = 0$  rispetto al momento angolare  $L$  troviamo  $L^2 = 4/\sqrt{3} > 2$  e questo farà variare il comportamento delle curve di livello per valori di energia maggiori di zero.

**Caso 3a.**  $2 < L^2 < 4/\sqrt{3}$ .

- Per  $E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  e il punto stabile  $P_+$ .
- per  $V_{\text{eff}}(\rho_+) < E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  e una periodica intorno al punto stabile  $P_1$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$  il punto instabile  $P_-$ , due traiettorie aperte tali che  $\lim_{\rho \rightarrow \rho_-} y(y) = 0$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  rispettivamente, e una traiettoria omoclina al punto instabile con tangenza obliqua.
- Per  $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < 0$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = +\infty$ .
- Per  $E \geq 0$  due traiettorie aperte, una con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(r) = \sqrt{2E}$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = +\infty$ , l'altra simmetrica alla prima rispetto all'asse  $\rho$

**Caso 3b.**  $L^2 = 4/\sqrt{3}$

- Per  $E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  e il punto stabile  $P_+$ .
- per  $V_{\text{eff}}(\rho_+) < E < 0$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  e una periodica intorno al punto stabile  $P_1$ .
- Per  $E = 0$  il punto instabile  $P_-$  e quattro traiettorie aperte tali che  $\lim_{\rho \rightarrow \rho_-} y(y) = 0$ ; in particolare due di queste sono tali che  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  rispettivamente, e le altre due sono tali che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(r) = 0$  rispettivamente;

- Per  $E > 0$  due traiettorie aperte, una con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(r) = \sqrt{2E}$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = +\infty$ , l'altra simmetrica alla prima rispetto all'asse  $\rho$

### Caso 3c $L^2 > 4\sqrt{3}$

- Per  $E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  e il punto stabile  $P_+$ .
- per  $V_{\text{eff}}(\rho_+) < E < 0$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  e una periodica intorno al punto stabile  $P_+$ .
- per  $0 < E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  e una, sempre aperta, con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(r) = \pm\sqrt{2E}$
- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$  il punto instabile  $P_-$  e quattro traiettorie aperte tali che  $\lim_{\rho \rightarrow \rho_-} y(y) = 0$ ; in particolare due di queste sono tali che  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$  rispettivamente, e le altre due sono tali che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(r) = \pm\sqrt{2E}$  rispettivamente;
- Per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_-)$  due traiettorie aperte, una con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(r) = \sqrt{2E}$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = +\infty$ , l'altra simmetrica alla prima rispetto all'asse  $\rho$

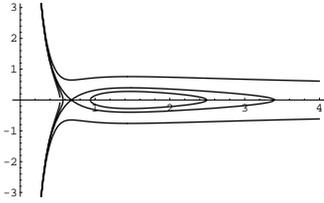


Figura 6: Piano delle fasi per  $2 < L^2 < 4/\sqrt{3}$

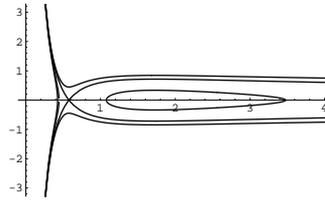


Figura 7: Piano delle fasi per  $L^2 = 4/\sqrt{3}$

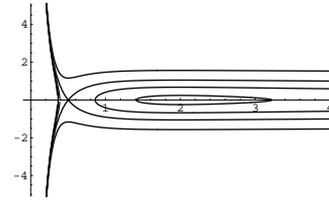


Figura 8: Piano delle fasi per  $L^2 > 4/\sqrt{3}$

(1.5) **Traiettori periodiche.** Per quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso  $L^2 > 2$  e solo per dati iniziali  $\rho_- < \rho < \rho_+$ . In particolare, se  $2 < L^2 < 4/\sqrt{3}$  avremo traiettorie periodiche per valori di energia  $V_{\text{eff}}(\rho_+) < E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$ , mentre se  $L^2 \geq 4/\sqrt{3}$  le traiettorie periodiche saranno possibili per valori di energia  $V_{\text{eff}}(\rho_+) < E < 0$ .

(1.6) **Moto complessivo.** Avremo moto complessivo periodico in accordo con le condizioni date al punto precedente, e nei punti d'equilibrio. Inoltre se  $T_0$  è il periodo della variabile  $\rho$  e

$$\Delta\theta = \int_0^{T_0} ds \frac{L}{\rho^2(s)}$$

deve valere che  $\Delta\theta$  è commensurabile con  $2\pi$ . In particolare se  $N$  è l'intero minimo tale che  $N\Delta\theta = 2\pi M$  per qualche  $M$  intero, allora il periodo del moto complessivo è dato da  $NT_0$ .

### ESERCIZIO 2.

(2.1) **Descrizione del moto.** Ricordiamo che nel sistema del centro di massa, il sistema si disaccoppia, in coordinate polari, nei due problemi

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho}, \quad \ddot{\theta} = \frac{L}{2\mu\rho^2}$$

e quindi, essendo  $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 = 1$ , diventa

$$\ddot{\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3}, \quad \ddot{\theta} = \frac{L}{2\rho^2}$$

Poiché la parte angolare dipende esclusivamente dalla parte radiale ci concentreremo solo sulla prima delle due equazioni, il cui sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(2.2) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo che i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace, pertanto dobbiamo risolvere l'equazione  $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Si verifica immediatamente che tale equazione ha soluzioni

$$\rho_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4L^2}}{2}$$

Si vede quindi che se  $\alpha \geq 0$  l'equazione non ammette soluzioni reali positive (ricordiamo che  $\rho$  è un raggio e quindi non può essere un numero negativo). Se invece  $\alpha < 0$  scriviamo  $\alpha = -\beta$  con  $\beta > 0$ . In questo caso l'equazione ammette soluzioni se e solo se  $|L| \leq \beta/2$ . In particolare avremo quindi

- per  $|L| > \beta/2$  nessun punto d'equilibrio.
- per  $|L| = \beta/2$  un solo punto d'equilibrio in  $P_0 = (\beta/2, 0)$ .
- per  $|L| < \beta/2$  due punti d'equilibrio in  $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$  con  $\rho_{\pm} = \frac{1}{2} (\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4L^2})$ .

**Stabilità dei punti d'equilibrio.** Innanzitutto osserviamo che  $[dV_{\text{eff}}/d\rho] < 0 \forall \rho \neq \beta/2$ , cioè  $\rho = \beta/2$  è una sella del potenziale e quindi  $P_0$  è instabile. Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = -\frac{2\beta}{\rho^3} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

e quindi se  $|L| < \beta/2$  avremo che  $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_-) > 0$  quindi  $\rho_-$  è un minimo del potenziale e dunque  $P_-$  è stabile; viceversa  $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_+) < 0$  quindi  $\rho_+$  è un massimo, perciò  $P_+$  è instabile.

(2.3) **Andamento all'infinito del potenziale efficace.** Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

indipendentemente dalla scelta dei parametri.

**Grafico del potenziale efficace.**

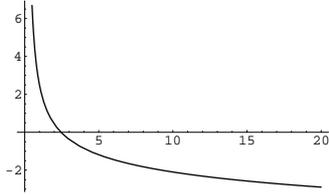


Figura 9: Grafico del potenziale per  $\alpha \geq 0$  oppure  $|L| > \beta/2$

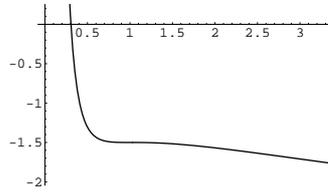


Figura 10: Grafico del potenziale per  $|L| = \beta/2$

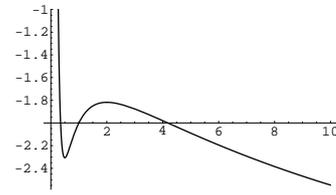


Figura 11: Grafico del potenziale per  $|L| < \beta/2$

**Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Suddividiamo il problema in tre casi.

**Caso 1.**  $\alpha > 0$  oppure  $|L| > \beta/2$ . Per ogni valore di  $E$  avremo una traiettoria aperta, simmetrica rispetto all'asse  $\rho$ , con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

**Caso 2.**  $|L| = \beta/2$ .

- Per  $E < V_{\text{eff}}(\beta/2)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(\beta/2)$  due traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ , e con  $\lim_{\rho \rightarrow \beta/2} y(\rho) = 0$  con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile  $P_0$ .
- Per  $E > V_{\text{eff}}(\beta/2)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

**Caso 3.**  $|L| < \beta/2$ .

- Per  $E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$  e il punto stabile  $P_-$ .
- Per  $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$  e il punto stabile  $P_-$  e una periodica intorno al punto stabile.

- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria omoclina con  $\lim_{\rho \rightarrow \rho_+} y(\rho) = 0$ , due traiettorie aperte con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$  e il punto instabile  $P_+$ .
- Per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

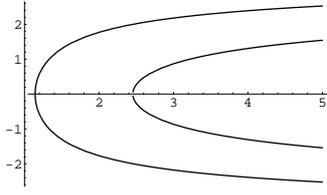


Figura 12: Piano delle fasi per  $\alpha \geq 0$  oppure  $|L| > \beta/2$

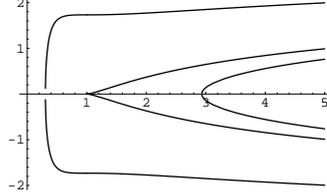


Figura 13: Piano delle fasi per  $|L| = \beta/2$

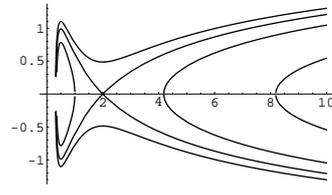


Figura 14: Piano delle fasi per  $|L| < \beta/2$

(2.4) Per quanto visto al punto precedente avremo traiettorie periodiche solo nel caso  $|L| < \beta/2$  e solo per dati iniziali  $\rho_- < \rho < \rho_+$  e valori di energia  $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$ .

(2.5) **Variabile angolare.** Come visto al punto (2.1) il moto della variabile angolare è dato da

$$\dot{\theta} = \frac{L}{2\rho^2}$$

**Moto complessivo.** Avremo moto complessivo periodico in accordo con le condizioni date al punto (2.4), e nei punti d'equilibrio. Inoltre se  $T_0$  è il periodo della variabile  $\rho$  e

$$\Delta\theta = \int_0^{T_0} ds \frac{L}{\rho^2(s)}$$

deve valere che  $\Delta\theta$  è commensurabile con  $2\pi$ . In particolare se  $N$  è l'intero minimo tale che  $N\Delta\theta = 2\pi M$  per qualche  $M$  intero, allora il periodo del moto complessivo è dato da  $NT_0$ .

### ESERCIZIO 3.

(3.1) **Equazione di Newton.** Poiché  $m = 1$  il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \log\left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho}\right) + \frac{L^2}{2\rho^2}$$

quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \frac{1}{\rho} - \frac{2\rho}{\rho^2 + 1} + \frac{L^2}{\rho^3}$$

**Sistema dinamico associato.**

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{\rho} - \frac{2\rho}{\rho^2 + 1} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(3.2) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione  $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$  vediamo che questa ammette sempre un'unica soluzione data da

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{(1 + L^2)}{2} + \frac{\sqrt{(1 + L^2)^2 + 4L^2}}{2}}$$

quindi il sistema ammette un unico punto d'equilibrio in  $P_0 = (\rho_0, 0)$ .

**Stabilità.** Derivando ulteriormente il potenziale efficace troviamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = \frac{1 + 4\rho^2 - \rho^4}{(\rho + \rho^3)^2} + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

e si verifica facilmente che  $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_0) > 0$ , cioè  $\rho_0$  è un minimo per il potenziale efficace e quindi  $P_0$  è stabile.

(3.3) **Andamento all'infinito.** Indipendentemente dal valore di  $L$  si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

**Grafico del potenziale efficace.**

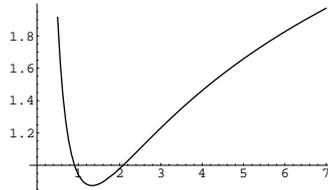


Figura 15: Grafico del potenziale efficace.

(3.4) **Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ ; inoltre osserviamo che il potenziale efficace è limitato dal basso, quindi il moto nel piano delle fasi sarà possibile solo per  $E \geq V_{\text{eff}}(\rho_0)$ . Indipendentemente dal valore di  $L$  avremo

- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_0)$  il solo punto stabile  $P_0$ .
- Per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_0)$  una traiettoria periodica intorno a  $P_0$ .

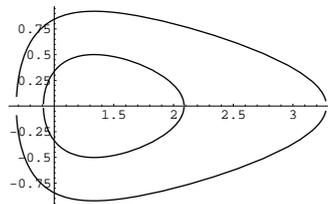


Figura 16: Piano delle fasi.

(3.5) Per quanto visto al punto precedente avremo traiettorie periodiche per ogni scelta del dato iniziale ad eccezione del punto d'equilibrio  $P_0$ .