

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
 TUTORATO IX - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Equazioni di Newton.** Poiché $m = 1$ il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3}$$

Sistema dinamico associato.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(1.2) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ vediamo che questa ha soluzione se e solo se $L^2 \leq 1$. In particolare avremo quindi

- per $L^2 < 1$ nessun punto d'equilibrio.
- per $L^2 = 1$ un solo punto d'equilibrio in $P_0 = (1, 0)$.
- per $L^2 \leq 1$ due punti d'equilibrio in $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$, con $\rho_{\pm} = \sqrt[3]{1 \pm \sqrt{1 - L^2}}$

Stabilità dei punti d'equilibrio. Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = -3\rho^2 + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

quindi se $L^2 = 1$ avremo che $[dV_{\text{eff}}/d\rho] < 0 \forall \rho \neq 1$ cioè $\rho = 1$ è una sella del potenziale, dunque P_0 è instabile. Per $L^2 < 1$ invece si ha $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_-) > 0$ quindi ρ_- è un minimo del potenziale e dunque P_- è stabile; viceversa $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_+) < 0$ quindi ρ_+ è un massimo e perciò P_+ è instabile.

(1.3) **Andamento all'infinito.** Indipendentemente dal valore di L si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

Grafico del potenziale efficace.

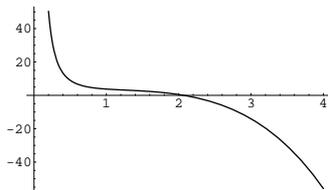


Figura 1: Grafico del potenziale per $L^2 < 2$

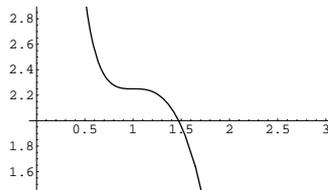


Figura 2: Grafico del potenziale per $L^2 = 2$

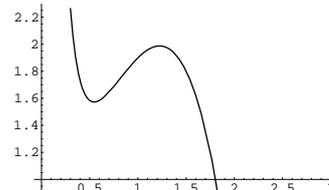


Figura 3: Grafico del potenziale per $L^2 > 2$

(1.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ otteniamo $y = \pm \sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Suddividiamo il problema in tre casi.

Caso 1. $L^2 > 1$. Per ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$

Caso 2. $L^2 = 1$.

- Per $E < V_{\text{eff}}(1)$ avremo una curva aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.
- Per $E = V_{\text{eff}}(1)$ due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$, e con $\lim_{\rho \rightarrow 1} y(\rho) = 0$ con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile $(1, 0)$.
- Per $E \geq V_{\text{eff}}(1)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = +\infty$.

Caso 3. $L^2 < 1$.

- Per $E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.
- Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto stabile P_- .
- per $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e una periodica intorno al punto stabile P_- .
- Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$ il punto instabile P_+ , due traiettorie aperte tali che $\lim_{\rho \rightarrow \rho_+} y(\rho) = 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ rispettivamente, e una traiettoria omoclina al punto instabile con tangenza obliqua.
- Per $E > V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = +\infty$.

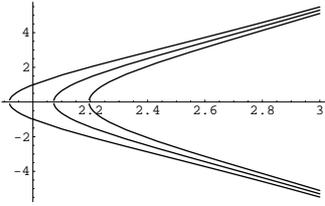


Figura 4: Piano delle fasi per $L^2 > 1$

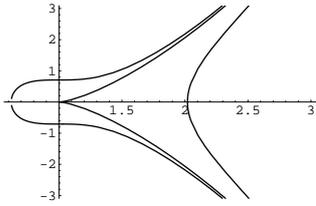


Figura 5: Piano delle fasi per $L^2 = 1$

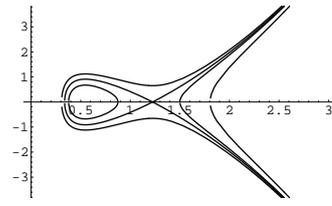


Figura 6: Piano delle fasi per $L^2 < 1$

(1.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso $L^2 < 1$ e solo per dati iniziali $\rho_- < \rho < \rho_+$ e valori di energia $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$.

(1.6) **Moto complessivo.** Avremo moto complessivo periodico in accordo con le condizioni date al punto precedente, e nei punti d'equilibrio. Inoltre se T_0 è il periodo della variabile ρ e

$$\Delta\theta = \int_0^{T_0} ds \frac{L}{\rho^2(s)}$$

deve valere che $\Delta\theta$ è commensurabile con 2π . In particolare se N è l'intero minimo tale che $N\Delta\theta = 2\pi M$ per qualche M intero, allora il periodo del moto complessivo è dato da NT_0 .

ESERCIZIO 2.

(2.1) **Descrizione del moto.** Ricordiamo che nel sistema del centro di massa, il sistema si disaccoppia, in coordinate polari, nei due problemi

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho}, \quad \ddot{\theta} = \frac{L}{2\mu\rho^2}$$

e quindi, essendo $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 = 1$, diventa

$$\ddot{\rho} = 4\rho + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3}, \quad \dot{\theta} = \frac{L}{2\rho^2}$$

Poiché la parte angolare dipende esclusivamente dalla parte radiale ci concentreremo solo sulla prima delle due equazioni, il cui sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = 4\rho + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(2.2) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo che i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace, pertanto dobbiamo risolvere l'equazione $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Si verifica immediatamente che tale equazione ha soluzioni

$$\rho_{\pm} = \sqrt{-\frac{\alpha}{8} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 16L^2}}{8}}$$

Si vede quindi che se $\alpha \geq 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali positive. Se invece $\alpha < 0$ scriviamo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$. In questo caso l'equazione ammette soluzioni se e solo se $|L| \leq \beta/4$. In particolare avremo quindi

- per $|L| > \beta/4$ nessun punto d'equilibrio.
- per $|L| = \beta/4$ un solo punto d'equilibrio in $P_0 = (\sqrt{\beta/8}, 0)$.
- per $|L| < \beta/4$ due punti d'equilibrio in $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$ con $\rho_{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 16L^2}}$.

Stabilità dei punti d'equilibrio. Innanzitutto osserviamo che $[dV_{\text{eff}}/d\rho] < 0 \forall \rho \neq \sqrt{\beta/8}$, cioè $\rho = \sqrt{\beta/8}$ è una sella del potenziale e quindi P_0 è instabile. Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = -4 - \frac{\beta}{\rho^2} + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

e quindi se $|L| < \beta/4$ avremo che $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_-) > 0$ quindi ρ_- è un minimo del potenziale e dunque P_- è stabile; viceversa $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_+) < 0$ quindi ρ_+ è un massimo, perciò P_+ è instabile.

(2.3) **Andamento all'infinito del potenziale efficace.** Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

indipendentemente dalla scelta dei parametri.

Grafico del potenziale efficace.

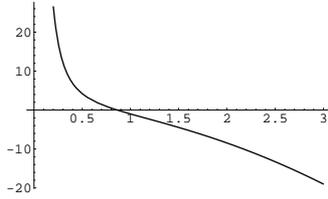


Figura 7: Grafico del potenziale per $\alpha \geq 0$ oppure $|L| > \beta/4$

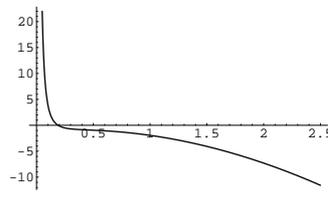


Figura 8: Grafico del potenziale per $|L| = \beta/4$

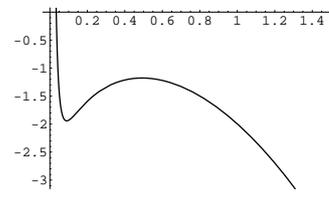


Figura 9: Grafico del potenziale per $|L| < \beta/4$

Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Suddividiamo il problema in tre casi.

Caso 1. $\alpha > 0$ oppure $|L| > \beta/2$. Per ogni valore di E avremo una traiettoria aperta, simmetrica rispetto all'asse ρ , con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

Caso 2. $|L| = \beta/2$.

- Per $E < V_{\text{eff}}(\sqrt{\beta/8})$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.
- Per $E = V_{\text{eff}}(\sqrt{\beta/8})$ due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$, e con $\lim_{\rho \rightarrow \sqrt{\beta/8}} y(\rho) = 0$ con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile P_0 .
- Per $E > V_{\text{eff}}(\sqrt{\beta/8})$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

Caso 3. $|L| < \beta/4$.

- Per $E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.
- Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto stabile P_- .

- Per $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto stabile P_- e una periodica intorno al punto stabile.
- Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria omoclina con $\lim_{\rho \rightarrow \rho_+} y(\rho) = 0$, due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto instabile P_+ .
- Per $E > V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

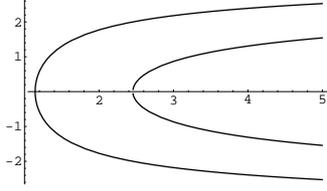


Figura 10: Piano delle fasi per $\alpha \geq 0$ oppure $|L| > \beta/4$

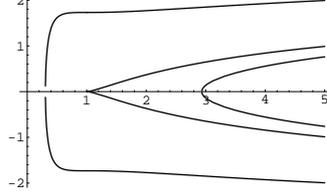


Figura 11: Piano delle fasi per $|L| = \beta/4$

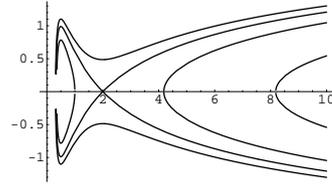


Figura 12: Piano delle fasi per $|L| < \beta/4$

(2.4) Per quanto visto al punto precedente avremo traiettorie periodiche solo nel caso $|L| < \beta/4$ e solo per dati iniziali $\rho_- < \rho < \rho_+$ e valori di energia $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$.

(2.5) **Variabile angolare.** Come visto al punto (2.1) il moto della variabile angolare è dato da

$$\dot{\theta} = \frac{L}{2\rho^2}$$

Moto complessivo. Avremo moto complessivo periodico in accordo con le condizioni date al punto (2.4), e nei punti d'equilibrio. Inoltre se T_0 è il periodo della variabile ρ e

$$\Delta\theta = \int_0^{T_0} ds \frac{L}{\rho^2(s)}$$

deve valere che $\Delta\theta$ è commensurabile con 2π . In particolare se N è l'intero minimo tale che $N\Delta\theta = 2\pi M$ per qualche M intero, allora il periodo del moto complessivo è dato da NT_0 .

ESERCIZIO 3. Innanzitutto notiamo che possiamo scrivere il potenziale come

$$V(\rho) = -\frac{\kappa}{\rho}, \quad \kappa := \frac{2\alpha - 3}{12}$$

Si tratta quindi di un campo centrale Coulombiano. Si veda il Capitolo 7 delle dispense per uno studio completo di tale campo.