

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
TUTORATO II - LIVIA CORSI (07-03-07)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

con condizioni iniziali $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $x(0) = (1, 2, 1)$. Se ne determini la soluzione. Verificare in particolare che il moto descritto dal sistema è planare e descrivere il piano su cui si svolge.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 1)$. Se ne determini la soluzione.

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione al variare del parametro α .

ESERCIZIO 5. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia S l'insieme delle soluzioni del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

al variare del dato iniziale.

(5.1) Verificare che S è un sottospazio vettoriale di $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ isomorfo a \mathbb{R}^n .

(5.2) Mostrare che la derivazione d/dt è un'operatore lineare su S i cui autospazi corrispondono agli autospazi di A .