Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato III - Livia Corsi (14-03-07)

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax + B(t), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali $x(0) = (0, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} - x = \varepsilon \sin(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Se ne determini la soluzione al variare di $\varepsilon \geq 0$.

Esercizio 3. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione non nulla di

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} t^2 \ddot{x} + \dot{x} = -t^3 \\ x(1) = 1 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} t\ddot{x} = \dot{x} + t \sin \dfrac{\dot{x}}{t} \\ x(1) = -1 \\ \dot{x}(1) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 6. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione. Scrivere inoltre l'equazione cartesiana della curva $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ nella base degli autovettori di A e tracciare un grafico qualitativo del flusso.

Esercizio 7. Si consideri lo spazio S delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Determinare una base per S.