

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007**  
**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

TUTORATO IV - LIVIA CORSI (21-03-07)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 1 - 3x^2 - y^2 \end{cases}$$

- (1.1) Determinare una costante del moto per il sistema.
- (1.2) Trovare i punti d'equilibrio e discuterne la natura.
- (1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

- (1.4) Individuare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (1.5) Scrivere esplicitamente la soluzione con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$ .

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 8x^3(x^2 - 4)(x^2 - 2) \end{cases}$$

- (2.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = y^2 - x^4(x^2 - 4)^2$$

è una costante del moto per il sistema.

- (2.2) Trovare i punti d'equilibrio e discuterne la natura.
- (2.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

- (2.4) Individuare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^4 - 2x^2y^2 + 1) \\ \dot{y} = -2x(2x^2y^2 - y^4 - 1) \end{cases}$$

- (3.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = (x^2y^2 - 1)(x^2 - y^2)$$

è una costante del moto per il sistema.

- (3.2) Trovare i punti d'equilibrio e discuterne la natura.
- (3.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

- (3.4) Dire se esistono dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.