

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO V - LIVIA CORSI (28-03-07)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(2y^2 - e^{2x} - e^{-2x}) \\ \dot{y} = 2y^2(e^{2x} - e^{-2x}) \end{cases}$$

(1.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = y^4 - y^2(e^{2x} + e^{-2x})$$

è una costante del moto per il sistema.

(1.2) Trovare i punti d'equilibrio e discuterne la natura.

(1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(1.4) Mostrare che non esistono dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \quad z = (x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

dove

$$V(x, y) = y^2 + 1 - \cos x$$

(2.1) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(2.2) Analizzare qualitativamente le curve di livello.

(2.3) Stimare il bacino d'attrazione degli eventuali punti asintoticamente stabili.

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2 - 2) \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 2) \end{cases}$$

(3.1) Determinare una costante del moto per il sistema.

(3.2) Trovare i punti d'equilibrio e discuterne la natura.

(3.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(3.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

(3.5) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, individuare il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine diventa asintoticamente stabile. Verificare inoltre che in tal caso la regione

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

è contenuta nel bacino d'attrazione dell'origine.