

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VIII - LIVIA CORSI (02-05-07)

ESERCIZIO 1. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{\rho} - \frac{1}{3\rho^3}$$

- (1.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (1.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (1.3) Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
- (1.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (1.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (1.6) Discutere le condizioni sotto le quali, in generale, il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 2. Si considerino due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = 2$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} - \log \rho$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti e $\alpha \in \mathbb{R}$. Risondere alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare del sistema.

- (2.1) Descrivere il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà nelle variabili polari (ρ, θ) .
- (2.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.3) Discutere il moto della variabile $\rho(t)$ e analizzare qualitativamente le orbite del piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (2.4) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (2.5) Scrivere la variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$ e dire sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho} \right)$$

- (3.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (3.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
- (3.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.