Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Il metodo della variazione delle costanti

(Livia Corsi)

Il metodo della variazione delle costanti è una tecnica semplice ma efficace per determinare la soluzione generale di equazioni differenziali lineari non omogenee; di seguito ci occuperemo nel dettaglio del caso particolare di equazioni al primo e al second'ordine, e questo sostanzialmente perché è quasi immediato (una volta capito come procedere in questi casi semplici) estendere il metodo anche a ordini di derivazione più alti. Cominciamo con alcuni risultati preliminari.

Lemma 1. *L'insieme S_1 delle soluzioni dell'equazione omogenea*

$$\dot{x} + a_0 x = 0 \tag{1}$$

è uno spazio vettoriale isomorfo a $\mathbb{R}$

Dimostrazione. Risolvendo la (1) per separazione di variabili, troviamo

$$x(t) = c_0 e^{-a_0 t} \tag{2}$$

al variare di $c_0 \in \mathbb{R}$, e si vede immediatamente che quindi S_1 è uno spazio vettoriale e che l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi :& \mathbb{R} \longrightarrow S_1 \\ & c_0 \longmapsto c_0 e^{-a_0 t} \end{aligned}$$

è un'isomorfismo. $\square$

Nel caso di equazioni al second'ordine abbiamo un risultato del tutto analogo.

Lemma 2. *L'insieme S_2 delle soluzioni dell'equazione omogenea*

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \tag{3}$$

è uno spazio vettoriale isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Considerata la sostituzione $\dot{x} = y$ scriviamo il sistema

$$\dot{\xi} = A\xi, \qquad \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che l'insieme delle soluzioni del sistema è uno spazio vettoriale isomorfo a $\mathbb{R}^2$; d'altra parte la soluzione generale dell'equazione coincide con la prima riga del vettore ξ ovvero

$$x(t) = h_{11}\xi_{01} + h_{12}\xi_{02}, \qquad h_{ij} := (\exp(At))_{ij}$$

Di nuovo si verifica facilmente che S_2 è uno spazio vettoriale e che

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S_2 \\ (\xi_{01}, \xi_{02}) &\longmapsto h_{11}\xi_{01} + h_{12}\xi_{02} \end{aligned}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. $\square$

A questo punto è immediato capire come questi due risultati appena visti possono essere estisi anche nel caso di equazioni differenziali a oridini di derivazione più alti. Vediamo ora un risultato molto simile ad un altro (ben noto) dell'algebra lineare.

Proposizione 3. *Considerata l'equazione differenziale*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f(t) \tag{4}$$

sia

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \tag{5}$$

l'equazione omogenea associata e siano $\overline{x}$ *soluzione di (4) e* x_0 *soluzione di (5). Allora* $x := \overline{x} + x_0$ *è ancora soluzione di (4).*

Dimostrazione. Poiché $\overline{x}$ è soluzione di (4) allora

$$\overline{x}^{(n)} + a_{n-1}\overline{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} = f(t)$$

mentre per x_0 dovrà valere

$$x_0^{(n)} + a_{n-1}x_0^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x}_0 + a_1\dot{x}_0 + a_0x_0 = 0$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
x^{(n)} &+ a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = \\
&= \overline{x}^{(n)} + x_0^{(n)} + a_{n-1}(\overline{x}^{(n-1)} + x_0^{(n-1)}) + \ldots + a_2(\ddot{\overline{x}} + \ddot{x}_0) + a_1(\dot{\overline{x}} + \dot{x}_0) + a_0(\overline{x} + x_0) \\
&= \overline{x}^{(n)} + a_{n-1}\overline{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} + \\
&\qquad + x_0^{(n)} + a_{n-1}x_0^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x}_0 + a_1\dot{x}_0 + a_0x_0 \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

ovvero anche x è soluzione di (4). Inoltre si vede che $\forall z$ soluzione di (4) esiste y soluzione di (5) tale che $z = \overline{x} + y$. Infatti se consideriamo

$$\begin{cases} \overline{x}^{(n)} + a_{n-1}\overline{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} = f(t) \\ z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{z} + a_1\dot{z} + a_0z = f(t) \end{cases} \tag{6}$$

la differenza delle due equazioni in (6) sarà

$$z^{(n)} - \overline{x}^{(n)} + a_{n-1}(z^{(n-1)} - \overline{x}^{(n-1)}) + \ldots + a_2(\ddot{z} - \ddot{\overline{x}}) + a_1(\dot{z} - \dot{\overline{x}}) + a_0(z - \overline{x}) = 0$$

quindi ponendo $y = z - \overline{x}$ avremo che y è soluzione di (5) e $z = y + \overline{x}$. □

L'idea consiste quindi nello scrivere la soluzione generale di un'equazione non omogenea come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (più facile da calcolare) e una soluzione particolore dell'equazione non omogenea.

Teorema 4.*La soluzione generale dell'equazione*

$$\dot{x} + a_o x = f(t) \tag{7}$$

è data da

$$x(t) = e^{-a_0 t}\left(k + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s)e^{a_0 s}\right) \tag{8}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Osserviamo che l'equazione omogenea associata è (1) la cui soluzione si ottiene facilmente per separazione di variabili ed è data dalla (2). Cerchiamo una soluzione particolare di (7) della forma

$$\overline{x} = c(t)e^{-a_0 t} \tag{9}$$

Allora

$$\dot{\overline{x}} = \dot{c}e^{-a_0 t} - c a_t e^{-a_0 t}$$

quindi affinché $\overline{x}$ sia soluzione di (7), deve valere

$$\dot{c}e^{-a_0 t} + -c a_t e^{-a_0 t} + a_0 c e^{-a_0 t} = f(t)$$

ovvero

$$\dot{c} = f(t)e^{a_0 t}$$

quindi integrando troviamo

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s)e^{a_0 s}$$

Si osservi che poiché stiamo cercando una soluzione particolare, possiamo fissare t_0 arbitrariamente. Abbiamo dunque ottenuto che una soluzione particolare è data da

$$\overline{x}(t) = e^{-a_0 t}\left(c(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s)e^{a_0 s}\right)$$

e quindi la soluzione generale di (7) è

$$\begin{aligned} x(t) = \overline{x} + x_0 &= e^{-a_0 t}\left(c(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s)e^{a_0 s}\right) + c_0 e^{-a_0 t} \\ &= e^{-a_0 t}\left(c(t_0) + c_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s)e^{a_0 s}\right) \\ &= e^{-a_0 t}\left(k + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s)e^{a_0 s}\right) \end{aligned}$$

□

Il caso delle equazioni al second'ordine va trattato in modo un po' diverso: cercheremo prima la forma della soluzione generale di (3), poi daremo un criterio per determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Non arriveremo quindi a scrivere una formula risolutiva generale come nel caso di (7) ma daremo un criterio per ricavare la soluzione. Considerata quindi l'equazione

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t) \tag{10}$$

consideriamo l'equazione omogenea associata, ovvero la (3). Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

Distinguiamo quindi in tre casi.

PROPOSIZIONE 5. *Se $a_1^2 > 4a_0$ allora la soluzione generale di (3) è della forma*

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t} \tag{11}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie. Se $a_1^2 = 4a_0$ allora la soluzione generale di (3) è della forma

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-a_1 t/2} \tag{12}$$

e infine se $a_1^2 < 4a_0$, scriviamo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda}$. Allora la soluzione generale di (3) è della forma

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t) \tag{13}$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione del lemma 2 abbiamo visto che la soluzione di (3) si scrive nella forma

$$x(t) = h_{11}\xi_{01} + h_{12}\xi_{02}, \qquad h_{ij} := (\exp(At))_{ij}$$

In particolare se $a_1^2 > a_0$ allora λ_1, λ_2 sono autovalori reali e distinti della matrice A e quindi

$$\exp(At) = Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Q$$

dove Q, Q^{-1} sono matrici a coefficienti costanti, ovvero

$$\begin{aligned}\exp(At) &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}q_{11}e^{\lambda_1 t} + p_{12}q_{21}e^{\lambda_2 t} & p_{11}q_{12}e^{\lambda_1 t} + p_{12}q_{22}e^{\lambda_2 t} \\ \\ p_{21}q_{11}e^{\lambda_1 t} + p_{22}q_{21}e^{\lambda_2 t} & p_{21}q_{12}e^{\lambda_1 t} + p_{22}q_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da questa troviamo che quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= (p_{11}q_{11}e^{\lambda_1 t} + p_{12}q_{21}e^{\lambda_2 t})\xi_{01} + (p_{11}q_{12}e^{\lambda_1 t} + p_{12}q_{22}e^{\lambda_2 t})\xi_{02} \\ &= (p_{11}q_{11}\xi_{01} + p_{11}q_{12}\xi_0 2)e^{\lambda_1 t} + (p_{12}q_{21}\xi_{01} + p_{12}q_{22}\xi_{02})e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

ovevro se poniamo

$$c_1 = p_{11}q_{11}\xi_{01} + p_{11}q_{12}\xi_0 2 \qquad c_2 = p_{12}q_{21}\xi_{01} + p_{12}q_{22}\xi_{02}$$

questo prova la (11). Le dimostrazioni della (12) e della (13) sono del tutto analoghe a quella appensa vista per la (11) e quindi saranno omesse. □

Per determinare la soluzione generale di (10) dobbiamo quindi determinare una soluzione particolare $\overline{x}$ e scrivere $x = \overline{x} + x_0$ dove x_0 è soluzione generale di (3) e quindi assume una delle forme (11), (12) o (13). Il metodo della variazione delle costanti consiste quindi nello scrivere $c_1 = c_1(t)$ e $c_2 = c_2(t)$ in (11), (12) e (13) e imporre che $\overline{x}(t)$ sia soluzione ovvero che verifichi (10) come nel caso al prim'ordine. Scriviamo quindi in generale

$$\overline{x}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \tag{14}$$

dove $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono le soluzioni fondamentali nei tre casi, ovvero se $a_1^2 > 4a_0$ avremo

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Se $a_1^2 = 4a_0$ allora

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-a_1 t/2} \\ y_2(t) = te^{-a_1 t/2} \end{cases}$$

e infine se $a_1^2 < 4a_0$ allora

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{cases}$$

Se imponiamo la condizione

$$\dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = 0 \tag{15}$$

allora avremo

$$\ddot{\overline{x}} = \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 + c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} = \\ &\quad = \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 + (c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2) + a_1(c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2) + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &\quad = \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera perché $c_1y_1 + c_2y_2$ sono soluzioni del sistema omogeneo associato. Ma allora affinché $\overline{x}$ sia soluzione, le costatnti devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = 0 \\ \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 = f(t) \end{cases}$$

Dalla prima, ad esempio, troviamo $\dot{c}_2 = -\dot{c}_1 y_1/y_2$, che sostituita nella seconda da

$$\dot{c}_1\dot{y}_1 - \dot{c}_1 y_1 \dot{y}_2/y_2 = f(t)$$

e quindi scriviamo formalmente

$$c_1(t) = \int \mathrm{d}t \frac{f(t)y_2(t)}{\dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t)} \tag{16}$$

Utiliziamo tale scrittura formale dell'integrale perché, dato che cerchiamo una soluzione particolare, possiamo scegliere arbitrariamente la costante d'integrazione, ad esempio in modo tale che sia nulla. Sostituendo la (16) nella (15) riusciamo a calcolare anche $c_2(t)$. Si osservi che $\dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t) \not\equiv 0$ e questo dipende dal fatto che y_1, y_2 sono linearmente indipendenti.

Vediamo cosa succede in un caso facile.

Esempio 1. Consideriamo l'equazione differenziale odinaria

$$\ddot{x} + x = t$$

L'equazione omogenea associata è

$$\ddot{x} + x = 0$$

e questa ha autovalori $\lambda_\pm = \pm i$ quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$x_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Cerchiamo quindi una soluzione particolare della forma

$$\overline{x} = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$$

Avremo quindi

$$\dot{\overline{x}} = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

dopo aver imposto la condizione (15). Derivando una seconda volta otteniamo

$$\dot{\overline{x}} + \overline{x} = -\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t$$

e affinché sia una soluzione dovrà essere

$$-\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = t$$

dalla (15) troviamo

$$\dot{c}_2 = -\dot{c}_1 \frac{\cos t}{\sin t}$$

e quindi

$$-\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = \frac{-\dot{c}_1 \sin^2 t - \dot{c}_1 \cos^2 t}{\sin t} = -\frac{\dot{c}_1}{\sin t}$$

deve quindi valere

$$\dot{c}_1 = -t \sin t$$

e integrando troviamo

$$c_1(t) = \int \mathrm{d}t\, t \sin t = \sin t - t \cos t$$

Per quanto riguarda c_2 deve valere

$$\dot{c}_2 = t \cos t$$

e quindi

$$c_2(t) = \int \mathrm{d}t\, t \cos t = \cos t + t \sin t$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea è quindi data da

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + (\sin t - t \cos t) \cos t + (\cos t + t \sin t) \sin t$$

Osserviamo ininfine che se si ha a che fare con un problema di Cauchy, basta determinare la soluzione generale del problema differenziale e poi imporre il dato iniziale per calcolare il valore delle costanti che danno l'unica soluzione.