Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (09-01-2009)

ESERCIZIO 1. [10] Si consideri il sistema di equazioni differenziali non lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - x^3 - xy^2, \\ \dot{y} = x - y - yx^2 - y^3. \end{cases}$$

(1.1) [4] Sia $\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$: si trovi la forma esplicita di $\rho(t)$. [*Suggerimento. Si scriva l'equazione di evoluzione di* $\rho(t)$.]
(1.2) [3] Si dimostri, utilizzando il teorema di Ljapunov, che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(1.3) [3] Si studi qualitativamente il moto nel piano (x, y). [*Suggerimento. Può essere conveniente utilizzare coordinate polari* (ρ, θ).]

ESERCIZIO 2. [8]
(2.1) [2] Si trovi la soluzione dell'equazione lineare non omogenea $\dot{x} = x + B(t)$, per $x \in \mathbb{R}$ e $B(t)$ continua in t, in funzione del dato iniziale $x(0)$.
(2.2) [6] Sia $n \geq 2$. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x}_1 = x_1, \qquad \dot{x}_k = x_1 + \ldots + x_k, \qquad k = 2, \ldots, n.$$

(2.2.1) [1] Si dimostri che $x_1(t) = \mathrm{e}^t x_1(0)$.
(2.2.2) [4] Si dimostri che

$$x_k(t) = \mathrm{e}^t \sum_{i=1}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} x_i(0)$$

per $k = 2, \ldots, n$. [*Suggerimento. Si può procedere per induzione.*]
(2.2.3) [1] Se $x_k(0) = 1$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, si calcoli $\lim_{n \to \infty} x_n(t)$.

ESERCIZIO 3. [6]
(3.1) [2] Si definisca l'esponenziale di un operatore lineare, e si dimostri che la definizione è ben posta.
(3.2) [2] Sia A un operatore lineare nilpotente di ordine n. Si calcoli $\exp A$.
(3.3) [2] Si faccia un esempio di un operatore nilpotente di ordine n, per qualche $n \geq 2$.

ESERCIZIO 4. [8] Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1, e sia x_0 un punto d'equilibrio per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$. Sia $\dot{x} = A(x - x_0)$ il sistema linearizzato associato. Si assuma che tutti gli autovalori della matrice A abbiano parte reale negativa. Si dimostri allora che x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 5. [10] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo la retta di equazione $y = x$ in modo tale che si abbia $x_{O'}(t) = t$. Sia $\theta(t)$ l'angolo che l'asse ξ forma con l'asse x. All'istante iniziale i punti O e O' coincidono. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema di riferimento K con legge oraria $(\xi(t), \eta(t), 0)$. Siano $(x(t), y(t), 0)$ le coordinate di P nel sistema κ.
(5.1) [2] Esprimere $(x(t), y(t))$ in funzione di $(\xi(t), \eta(t))$.
(5.2) [4] Se $\theta(t) = t$ si trovi l'equazione che devono soddisfare $\xi(t)$ e $\eta(t)$ perché risulti $y(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Si trovi una soluzione di tale equazione. È tale soluzione unica? Quanto vale $x(t)$ per la soluzione trovata?
(5.3) [4] Se $\eta(t) = 0$ si trovino $\theta(t)$ e $\xi(t)$ tali che si abbia $y(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Quanto vale $x(t)$?

ESERCIZIO 6. [8] Si enunci e dimostri il teorema di König per un sistema rigido di N punti materiali, con particolare riferimento ai casi in cui (i) il sistema abbia un punto fisso e (ii) si scelga come punto di riferimento il centro d'inerzia del sistema. [Si faccia attenzione a definire tutte le quantità coinvolte.]