Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (09-06-2008)

CORREZIONE

Esercizio 1.

1.1. Si ha

$$x(t) = \mathrm{e}^{at} x(0) = \mathrm{e}^{at} x_0.$$

1.2. Se si definisce $\sigma = x_1 + \ldots + x_n$ si ottiene

$$\dot{\sigma} = \dot{x}_1 + \ldots + \dot{x}_n = n\,(x_1 + \ldots + x_n) = n\sigma, \qquad \sigma(0) = x_1(0) + \ldots + x_n(0) = n,$$

quindi $\sigma(t) = \mathrm{e}^{nt} n$. Di conseguenza, per $k = 1, \ldots, n$, si trova $\dot{x}_k = \mathrm{e}^{nt} n$ che per integrazione esplicita dà $x_k(t) - x_k(0) = \mathrm{e}^{nt} - 1$, e quindi, poiché $x_k(0) = 1$, si ottiene $x_k(t) = \mathrm{e}^{nt}$. La soluzione è pertanto

$$x_k = \mathrm{e}^{nt}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Esercizio 3.

3.1. Punti d'equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x, \\ \dot{y} = -2y + 2 = -2\,(y-1)\,, \\ \dot{z} = -4z^3, \end{cases}$$

così che si ha un solo punto d'equilibrio: $P_0 = (0, 1, 0)$.

3.2. Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio P_0 è data da

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi non dà informazioni.

D'altra parte se definiamo

$$H(x, y, z) = V(x, y, z) - V(0, 1, 0) = x^2 + y^2 - 2y + z^4 + 1 = x^2 + (y-1)^2 + z^4,$$

si vede che P_0 è un punto di minimo isolato per $H(x, y, z)$, e quindi per $V(x, y, z)$. Di conseguenza P_0 deve essere un punto asintoticamente stabile. Questa è una proprietà dei sistemi gradiente che si dimostra prendendo $H(x, y, z)$ come funzione di Ljapunov. Infatti risulta $H(P_0) = 0$, $H(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \neq P_0$ e, infine, $\dot{H}(x, y, z) < 0$ per ogni $(x, y, z) \neq P_0$. Sono quindi soddisfatte le ipotesi sotto le quali il teorema di Ljapunov implica che P_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

3.3. Traiettorie. Il sistema si disaccoppia in tre sistemi indipendenti

$$\dot{x} = -2x, \qquad \dot{y} = -2\,(y-1)\,, \qquad \dot{z} = -4z^3,$$

per i quali $x = 0$, $y = 1$ e $z = 0$, rispettivamente, sono punti globalmente attrattivi. Tutte e tre le equazioni si integrano esplicitamente. Le prime due sono lineari, quindi

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t} x(0), \qquad y(t) = 1 + \mathrm{e}^{-2t} \left(y(0) - 1 \right),$$

mentre la terza si integra facilmente per separazione di variabili, i.e.

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z^3} = -4 \int_0^t \mathrm{d}t = -4t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2z^2(t)} + \frac{1}{2z^2(0)} = -4t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{z^2(t)} = \frac{1}{z^2(0)} + 8t,$$

dalla quale si ottiene

$$z(t) = \frac{z(0)}{\sqrt{1 + 8z^2(0)t}}.$$

Quindi tutte le traiettorie tendono al punto P_0 per $t \to \infty$. Nel passato, in un tempo finito $-1/8z^2(0)$ vanno all'infinito (nella direzione z).

3.4. Stima del bacino d'attrazione. Indichiamo con

$$\Sigma_c = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H(x, y, z) = c \right\}$$

superfici di livello della funzione $H(x, y, z)$.

La superficie Σ_c è una superficie regolare compatta che racchiude il punto P_0 al suo interno, e le traiettorie attraversano tale superficie ortogonalmente, dirette verso l'interno.

Per stimare il bacino d'attrazione si può usare il teorema di Barbašin-Krasovskij, prendendo come insieme compatto positivamente invariante un qualsiasi insieme $\mathcal{P}$ ottenuto nel modo seguente. Si considera una superficie di livello Σ_c per $c > 0$ e si definisce $\mathcal{P}$ l'insieme compatto che contiene l'origine e ha Σ_c come frontiera: l'insieme così ottenuto è positivamante invariante poiché il campo vettoriale su Σ_c spinge verso l'interno.

Inoltre per $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si ha $\dot{H}(x, y, z) = 0$ se e solo se $(x, y, z) = (0, 1, 0) = P_0$, quindi, definendo $W(x, y, z) = H(x, y, z)$ tutte le condizioni del teorema di Barbašin-Krasovskij sono soddisfatte, e possiamo concludere che non solo P_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile (cosa che già conseguiva dall'analisi precedente) ma anche che $\mathcal{P}$ è contenuto nel suo bacino d'attrazione. Data l'arbitrarietà di c possiamo concludere che tutto lo spazio è il bacino d'attrazione di P_0, quindi P_0 è globalmente attrattivo.

<u>Esercizio 4.</u>

4.1. Equazione del moto. L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = \ddot{x} = F(x) = 4x^3 + 2\alpha x^2 + 4x,$$

essendosi tenuto conto che la massa è $m = 1$. Il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 4x^3 + 2\alpha x^2 + 4x. \end{cases}$$

4.2. Punti d'equilibrio e stabilità. I. I punti d'equilibrio hanno la forma $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, dove x_0 è soluzione di $F(x) = 0$, i.e. di

$$4x^3 + 2\alpha x^2 + 4x = 2x \left(2x^2 + \alpha x + 2 \right) = 0.$$

Quindi $x_0 = 0$ oppure $x_0 = x_\pm$, dove

$$x_\pm = \frac{1}{4}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}\right),$$

purché $|\alpha| \geq 4$.

Abbiamo i punti d'equilibrio $(x_0, 0)$, con

$$\begin{aligned}
|\alpha| > 4 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_0 = 0, \quad x_0 = x_- = \frac{1}{4}\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 16}\right), \quad x_0 = x_+ = \frac{1}{4}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 16}\right), \\
|\alpha| = 4 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_0 = 0, \quad x_0 = -\frac{\alpha}{4} = \begin{cases} -1, & \alpha = 4, \\ 1, & \alpha = -4, \end{cases} \\
|\alpha| < 4 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_0 = 0.
\end{aligned}$$

Per discutere la stabilità dei punti d'equilibrio conviene studiare prima l'energia potenziale $V(x)$.

4.3. Grafico dell'energia potenziale. Definiamo $V(x)$ tale che $F(x) = -V'(x) = -\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$. Si ha quindi

$$V(x) = -x^4 - \frac{2}{3}\alpha x^3 - 2x^2,$$

a meno di una costante additiva arbitraria (che possiamo porre uguale a 0).

I punti stazionari di $V(x)$ sono i valori x_0 tali che $(x_0, 0)$ sono punti d'equilibrio del sistema dinamico. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = -\infty.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
V'(x) &= -4x^3 - 2\alpha x^2 - 4x, \\
V''(x) &= -12x^2 - 4\alpha x - 4,
\end{aligned}$$

quindi $V''(0) = -4$. Ne segue che $x = 0$ è sempre un punto di massimo.

Se $|\alpha| < 4$ c'è un sono punto stazionario ($x = 0$), che sarà dunque un punto di massimo assoluto. La situazione è rappresentata in Figura 1 per $0 \leq \alpha < 4$.

Figura 1. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $0 \leq \alpha < 4$.

Se $|\alpha| > 4$ ci sono altri due punti stazionari $x_\pm$ oltre a $x = 0$. Poiché $\sqrt{\alpha^2 - 16} < |\alpha|$, abbiamo che i punti $x_\pm$ sono entrambi negativi per $\alpha > 0$ (e quindi per $\alpha > 4$) ed entrambi positivi per $\alpha < 0$ (e quindi per $\alpha < -4$). Inoltre si ha $x_- < x_+ < 0$ per $\alpha > 4$ e $0 < x_- < x_+$ per $\alpha < -4$. Quindi per $\alpha > 4$, il punto x_- è un punto di massimo, il punto x_+ è un punto di minimo e l'origine è un punto di massimo. Allo stesso modo, per $\alpha < -4$, l'origine è un punto di massimo, il punto x_- è un punto di minimo e il punto x_+ è un punto di massimo.

La situazione è rappresentata in Figura 2 per $\alpha > 4$.

Figura 2. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha > 4$.

Se $|\alpha| = 4$ il punto $x = x_+ = x_- = -\alpha/4$ è un punto di flesso orizzontale, mentre $x = 0$ è di nuovo un punto di massimo assoluto. La situazione è rappresentata in Figura 3 per $\alpha = 4$.

Figura 3. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha = 4$.

I grafici per $\alpha < 0$ sono analoghi. Si tenga conto che, fissato il valore di $|\alpha|$, il grafico di $V(x)$ per $\alpha < 0$ si ottiene da quello di $V(x)$ per $\alpha > 0$ per riflessione rispetto all'asse verticale. Infatti, se scriviamo

$V(x) = V(x;\alpha)$ per sottolineare la dipendenza da α dell'energia potenziale $V(x)$, si ha $V(-x;-\alpha) = V(x;\alpha)$.

4.2. Punti d'equilibrio e stabilità. II. Poiché $x = 0$ è sempre un punto di massimo per $V(x)$ ne segue che $(0,0)$ è un punto d'equilibrio instabile per il sistema dinamico. Questo si deduce facilmente dall'analisi qualitativa del moto che sarà discussa al punto 4.4: si vede subito che ci sono orbite lungo le quali ci si allontana dall'origine.

Allo stesso modo sono punti d'equilibrio instabile il punto $(x_-,0)$ per $\alpha > 4$, il punto $(x_+,0)$ per $\alpha < -4$ e il punto $(-\alpha/4,0)$ per $|\alpha| = 4$.

Invece il punto $(x_+,0)$ per $\alpha > 4$ e il punto $(x_-,0)$ per $\alpha < -4$ sono punti d'equilibrio stabile per il teorema di Dirichlet (perché sono punti di minimo isolati per $V(x)$).

4.4. Analisi qualitativa. Si hanno le situazioni seguenti: la Figura 4 corrisponde al caso $0 < \alpha < 4$ (cfr. Figura 1), la Figura 5 corrisponde al caso $\alpha > 4$ (cfr. Figura 2), la Figura 6 corrisponde al caso $\alpha = 4$ (cfr. Figura 3).

Figura 4. Analisi qualitativa per $0 \leq \alpha < 4$.

[Per studiare l'andamento delle curve di livello nell'intorno dei punti di equilibrio instabile che corrispondono ai massimi di $V(x)$ occorrerebbe studiare $V''(x)$. Per $x = 0$ si ha $V''(0) = -4 < 0$, quindi le curve di livello attraversano $x = 0$ con tangenza obliqua. Riguardo ai punti $x = x_-$ (per $\alpha > 0$) e $x = x_+$ (per $\alpha < 0$) si può ragionare come segue. Si ha

$$\begin{aligned} V''(x_\pm) &= -12x_\pm^2 - 4\alpha x_\pm - 4 = -8x_\pm^2 - 4\alpha x_\pm - 8 - 4x_\pm^2 + 4 \\ &= -2\left(4x_\pm^2 + 2\alpha x_\pm + 2\right) + 4 - 4x_\pm^2 = 4 - 4x_\pm^2 = 4 - \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}\right)^2 \\ &= 4 - 2\alpha^2 + 16 \pm 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 16} = 2\left(10 - \alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha^2 - 16}\right). \end{aligned}$$

Quindi per $\alpha > 4$ si ha

$$V''(x_-) = 2\left(10 - \alpha^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 - 16}\right) \leq 2\left(10 - \alpha^2\right) < -12,$$

e per $\alpha < -4$ si ha, analogamente,

$$V''(x_+) = 2\left(10 - \alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 - 16}\right) \leq 2\left(10 - \alpha^2\right) < -12,$$

che ci permette di concludere che anche in tali punti di equilibrio le curve di livello hanno tangenza obliqua.]

Il caso $\alpha < 0$ può essere discusso allo stesso modo, e dal punto di vista qualitativo non cambia nulla: si ottengono le stesse curve di livello, a meno di una riflessione rispetto all'asse y. Ovviamente i versi di

Figura 5. Analisi qualitativa per $\alpha > 4$.

Figura 6. Analisi qualitativa per $\alpha = 4$.

percorrenza sono sempre da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore.

4.5. Traiettoria assegnata. Dall'analisi del punto precedente segue che esistono traiettorie periodiche solo nel caso $|\alpha| > 4$. Inoltre si hanno traiettorie periodiche solo nel semipiano $x < 0$ per $\alpha > 4$ e nel semipiano $x > 0$ per $\alpha < -4$. Quindi non possiamo escludere a priori che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ sia periodica per $\alpha = -5$.

D'altra parte perché tale traiettoria sia periodica occorre anche che si abbia

$$x(0) < x_+, \qquad V(x_-) < H(x(0), y(0)) < \min\{V(0), V(x_+)\},$$

dove

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 - x^4 - \frac{2}{3}\alpha x^3 - 2x^2.$$

Per $\alpha = -5$ si ha

$$x_{\pm} = \frac{1}{4}\left(5 \pm \sqrt{25-16}\right) = \frac{5 \pm 3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{-} = \frac{1}{2}, \qquad x_{+} = 2,$$

e

$$H(1,0) = -1 - \frac{2}{3}\alpha - 2 = -3 + \frac{10}{3} = \frac{1}{3}, \qquad V(0) = 0,$$

quindi la condizione $1 < x_{+}$ è soddisfatta, ma la condizione $1/3 = H(x(0), y(0)) < \min\{V(0), V(x_{+})\}$ non lo è poiché $\min\{V(0), V(x_{+})\} = \min\{0, V(x_{+})\} \leq 0$. In conclusione la traiettoria con dato iniziale non può essere periodica.

<u>Esercizio 6.</u>

6.1. Tempo. La formica nel proprio sistema di riferimento si muove di moto rettilineo uniforme. Si fissi un sistema di riferimento fisso destrogiro $\kappa = Oxyz$, con O il centro della base A del cilindro e l'asse z ortogonale alla base A e diretto lungo l'asse di simmetria verso la base B, e si indichi con $K = O\xi\eta\zeta$ un sistema di riefrimento mobile solidale con il cilindro, con asse ζ coincidente con l'asse z di κ. All'istante $t = 0$ i due sistemi coincidono.

Se indichiamo con $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ la posizione della formica nel sistema K possiamo supporre (scegliendo opportunamente l'asse x, e quindi l'asse ξ) che sia $\xi = R$ e $\eta = 0$. La formica si muove allora nella direzione ζ e si ha $\zeta(0) = 0$ e $\dot{\zeta} = v$. Quindi $\zeta(t) = vt$, e perciò

$$\xi(t) = R, \qquad \eta(t) = 0, \qquad \zeta(t) = vt,$$

fin tanto che la formica si muove sulla superfice laterale del cilindro. La formica raggiunge la base B del cilindro in un tempo t_0 tale che $\zeta(t_0) = h$, quindi

$$t_0 = \frac{h}{v}.$$

6.2. Numero di giri del cilindro Nel tempo t_0 il disco avrà fatto N giri, con

$$N = \frac{\omega t_0}{2\pi} = \frac{\omega h}{2\pi v}.$$

6.3. Traiettoria della formica. Se $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$ indicano i vettori che individuano un punto P (per esempio la posizione della formica) si ha

$$\mathbf{q}(t) = B(t)\,\mathbf{Q}(t),$$

dove $B(t)$ è la matrice di rotazione intorno all'asse $\zeta = z$ di un angolo $\theta(t) = \omega t$; quindi

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

così che si ha

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ vt \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\mathbf{q}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, vt).$$

Perciò la formica si muove lungo un'elica circolare di raggio R e passo $2\pi/\omega$; in coordinate cilindriche (ρ, θ, z) l'elica ha equazione $\rho = R$, $\theta = \omega t$ e $z = vt$.

6.4. Forza di Coriolis. La forza di Coriolis è data da

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Cor}} = -2m\left[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}(t)\right] = -2m \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} = (0,0,0) = 0,$$

dove m è la massa della formica ed $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sono i versori che individuano gli assi coordinati del sistema K.

6.5. Energia cinetica. Nel sistema fisso la velocità della mosca è $\dot{\mathbf{q}} = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v)$. Si ha quindi

$$T = \frac{1}{2} m \left(v^2 + \omega^2 R^2\right) + \frac{1}{2} I_3 \omega^2,$$

dove il primo termine rappresenta l'energia cinetica della formica e il secondo rappresenta l'energia cinetica del cilindro.
