Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (15-09-2008)

ESERCIZIO 1. [8]
Si consideri il sistema di equazioni differenziali non lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy^2 - y^2, \\ \dot{y} = xy - y - x^2 y. \end{cases}$$

(1.1) [2] Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(1.2) [2] Sia $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$: si dimostri che $r(t)$ tende a zero in modo monotono.
(1.3) [4] Si studi qualitativamente il moto nel piano (x, y). [*Suggerimento. Può essere conveniente utilizzare coordinate polari.*]

ESERCIZIO 2. [8]
Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico planare di classe C^1 che ammette una costante del moto $H(x)$ di classe C^2. Si supponga che

$$\lim_{|x| \to \infty} H(x) = \infty.$$

(2.1) [5] Dimostrare che le traiettorie sono definite globalmente nel tempo.
(2.2) [3] Dimostrare che $L_\omega(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 3. [8]
Sia dato il sistema gradiente in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x, y) = 1 - \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

(3.1) [1] Determinare i punti d'equilibrio.
(3.2) [2] Studiarne la stabilità.
(3.3) [3] Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.
(3.4) [2] Studiare il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 4. [12]
Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1 - |x|^5, \\ \dot{y} = 5y|x|^3 x. \end{cases}$$

(4.1) [1] Dimostrare che esiste una costante del moto $H(x, y)$ per il sistema e determinarla.
(4.2) [1] Determinare i punti d'equilibrio.
(4.3) [3] Discuterne la stabilità.
(4.4) [3] Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.
(4.5) [2] Si studi l'eventuale esistenza di traiettorie periodiche.
(4.6) [2] Si studi il limite per $t \to +\infty$ (se esiste) delle soluzioni $\varphi(t, (\bar{x}, \bar{y}))$ in corrispondenza delle condizioni iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$ e $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 0)$.

ESERCIZIO 5. [3]
(5.1) [2] Discutere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con momenti d'inerzia principali $I_1 = I_2 = I_3$.
(5.2) [1] Fare l'esempio di un solido che verifichi tale condizione sui momenti d'inerzia.

ESERCIZIO 6. [7]
Si consideri un cilindro circolare retto omogeneo di massa m, raggio r e altezza h.
(6.1) [4] Si calcoli il momento principale d'inerzia I_3 rispetto all'asse di simmetria.
(6.2) [3] Sia e_0 un asse parallelo all'asse di simmetria appartenente alla superficie del cilindro: si calcoli il momento d'inerzia I_0 del cilindro rispetto all'asse e_0, specificando quale teorema (nome ed enunciato) si applica per ottenere il risultato.