Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (18-06-2008)

Esercizio 1. [6] Si risolva il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_4 = x_1 + x_4, \end{cases}$$

con dato iniziale $x_k(0) = 1 \; \forall k = 1, \ldots, 4$.

Esercizio 2. [5] Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^2$, con f di classe C^1. Si supponga che esista una traiettoria periodica con orbita γ, e sia Γ l'interno di γ.
(2.1) [3] Dimostrare che se $x \in \Gamma$ allora $L_\omega(x) \neq \emptyset$.
(2.2) [2] Se $y_1, y_2 \in L_\omega(x)$ esiste sempre una curva $\mathcal{C}$ contenuta in $L_\omega(x)$ che connette y_1 a y_2? Perché?

Esercizio 3. [10] Sia dato il sistema gradiente in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x,y) = x^2 + (x+1)^2 \, y^2.$$

(3.1) [1] Determinare i punti d'equilibrio.
(3.2) [2] Studiarne la stabilità.
(3.3) [5] Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.
(3.4) [2] Stimare il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 4. [15] Si consideri il sistema meccanico conservativo che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{3}|x|^3 - x^2 + \alpha x,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del parametro α rispondere alle seguenti domande.
(4.1) [1] Scrivere le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
(4.2) [4] Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
(4.3) [5] Studiare il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
(4.4) [3] Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(4.5) [2] Dimostrare che per $\alpha = -1$ la traiettoria con energia totale $E = 0$ è periodica.

Esercizio 5. [4] Si consideri il problema dei due corpi. Si dimostri che il moto della variabile relativa avviene in un piano.

Esercizio 6. [12] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova lungo la circonferenza C di raggio R e centro l'origine, con velocità angolare costante $\omega_0 = 1$. Il sistema K ruota intorno all'asse verticale in modo tale che l'asse ζ coincida con l'asse z del sistema κ e l'asse ξ sia diretto lungo la normale esterna alla circonferenza. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo una circonferenza C_0 di raggio R_0 con velocità angolare costante $\omega_0 = 1$. Il centro della circonferenza C_0 oscilla lungo la direzione ξ con legge $\xi_0(t) = R_0 \cos \omega t$, con ω costante. All'istante iniziale O' ha coordinate $(R, 0, 0)$ e il punto P si trova in O'.
(6.1) [6] Determinare la traslazione C e la rotazione B tali che la trasformazione rigida $D \colon K \to \kappa$ si possa scrivere come composizione $D = C \circ B$.
(6.2) [1] Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.
(6.3) [1] Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$.
(6.4) [4] Per $R = 10\, R_0$ dare delle condizioni su ω perché il moto del punto P sia periodico nel sistema κ.