Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (09-04-2008)

Esercizio 1. [6] Dimostrare che se, data una matrice A, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $A^3 = \lambda A$, allora $\exp A$ è un polinomio di secondo grado in A, e calcolarne esplicitamente i coefficienti.

Esercizio 2. [12] Sia dato il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(2 - x^2\right).$$

(2.1) [1] Determinare i punti d'equilibrio.
(2.2) [1] Studiarne la stabilità.
(2.2) [7] Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.
(2.3) [3] Stimare il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 3. [9] Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

con $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sia $u : J \to E$ una soluzione massimale.
(3.1) [3] Dimostrare che J è un intervallo aperto: $J = (\alpha, \beta)$ con $\alpha < 0 < \beta$.
(3.2) [5] Risolvere l'equazione nel caso

$$f(x,t) = -\frac{6t^2 + 8t + 3}{2x(1+t)^2(1+2t)^2}, \qquad x(0) = 1,$$

e dimostrare che la funzione $u(t)$ è definita per $t \to \beta^-$.
(3.3) [1] Spiegare perché il punto (3.2) non è in contraddizione con il punto (3.1).

Esercizio 4. [3] Sia P un insieme compatto positivamente invariante per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$. Dimostrare che $L_\omega(\bar{x}) \neq \emptyset$ per ogni $\bar{x} \in P$.

Esercizio 5. [6] Utilizzare il teorema di decomposizione primaria per dimostrare che ogni operatore lineare si può scrivere come somma di un operatore semisemplice e di uno nilpotente che commutano tra loro.

Esercizio 6. [10] Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left[(2y+1)\left(x^2+1\right) - 2\right] \\ \dot{y} = -y\left[(y+1)\left(3x^2+1\right) - 2\right]. \end{cases}$$

(6.1) [1] Dimostrare che esiste una costante del moto $H(x,y)$ per il sistema.
(6.2) [1] Determinare i punti d'equilibrio.
(6.3) [4] Discuterne la stabilità.
(6.4) [4] Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.