Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Seconda prova d'esonero (30-05-2008)

Esercizio 1. [6] Dato il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \neq 0$ e sia S il piano ortogonale a $f(x_0)$ in x_0. Dimostrare che esiste un intorno B di x_0 e una funzione $\tau \colon B \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in B$ la traiettoria con dato iniziale in x raggiunge S nel tempo $\tau(x)$. Come dipende $\tau(x)$ da x?

Esercizio 2. [12] Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza

$$F(x) = -\alpha x + \beta x^5,$$

con $\alpha\, \beta \in \mathbb{R}$. Al variare dei parametri α e β rispondere alle seguenti domande.
(1) [1] Scrivere l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
(2) [1] Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
(3) [4] Studiare il grafico dell'energia potenziale $V(x)$ corrispondente alla forza $F(x)$.
(4) [3] Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(5) [1] Determinare sotto quali condizioni sui parametri (α, β) la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è periodica.
(6) [2] Per tali valori di (α, β) scriverne il periodo come integrale definito. Calcolarlo esplicitamente per $\beta = 0$.

Esercizio 3. [6] Enunciare e dimostrare il teorema da Huygens-Steiner.

Esercizio 4. [4] Si consideri il moto della coordinata relativa nel problema dei due corpi. Si dimostri che, se il momento angolare è nullo, allora il moto si svolge lungo una retta.

Esercizio 5. [6] Dimostrare che lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido è $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ o $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(2)$.

Esercizio 6. [10] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova lungo la circonferenza di raggio $R = 1$ e centro l'origine. L'angolo $\theta(t)$ che il vettore OO' forma con l'asse x è dato da $\theta(t) = \sin t$. Il sistema K ruota intorno all'asse verticale in modo tale che l'asse ζ coincida con l'asse z del sistema κ e l'asse η sia tangente alla circonferenza (all'istante $t = 0$ i due sistemi κ e K sono orientati allo stesso modo). Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K con legge oraria $\xi(t) = \sin \omega t$.
(6.1) [1] Determinare la traslazione C e la rotazione B tali che la trasformazione rigida $D \colon K \to \kappa$ si possa scrivere come composizione $D = C \circ B$.
(6.2) [1] Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.
(6.3) [1] Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(6.4) [1] Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$.
(6.5) [1] Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$.
(6.6) [1] Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.
(6.7) [1] Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.
(6.8) [3] Determinare delle condizioni su ω perché esista un tempo in cui il punto P ritorni nella posizione iniziale nel sistema κ.