

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
TUTORATO I - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice A il cui polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + 3\lambda - 4,$$

e dunque lo spettro di A sarà $\Sigma(A) = \{1, -4\}$; calcoliamo quindi gli autospazi associati a ciascun autovalore. $E^*(1) = \text{Ker}(A - \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(1) = \{(2s, 3s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}\}.$$

$E^*(-4) = \text{Ker}(A + 4\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

e dunque

$$E^*(-4) = \{(s, -s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}\}.$$

Pertanto una base di autovettori è data da $u = (2, 3)$ e $v = (1, -1)$. In questo modo avremo

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

e osserviamo inoltre che $S = Q^{-1}\tilde{S}Q = A$ che quindi è semisemplice e dunque

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\tilde{S}t)Q \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3e^{-4t} + 2e^t)/5 & 2(e^t - e^{-4t})/5 \\ 3(e^t - e^{-4t})/5 & (2e^{-4t} + 3e^t)/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione con dato iniziale $x(0) = (1, 1)$ è data da

$$x(t) = \exp(At)x(0) = \begin{pmatrix} (e^{-4t} + 4e^t)/5 \\ (6e^t - e^{-4t})/5 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2. Cominciamo intanto con lo scrivere il sistema nella forma

$$\dot{\xi}A\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $\xi(0) = \xi_0$. Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda + 1)^2 + 1$$

pertanto lo spettro è $\Sigma(A) = \{-1 + i, -1 - i\}$. Calcoliamo quindi gli autospazi (generalizzati). $E(-1 + i) = \text{Ker}(A - (-1 + i)\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} -ix + 2y = 0 \\ -\frac{1}{2}x - iy = 0 \end{cases} \implies ix = 2y,$$

pertanto

$$E(-1 + i) = \{(2s, is) : s \in \mathbb{R}\}.$$

da cui possiamo ricavare i due vettori coniugati

$$\varphi = (2, i) \quad \bar{\varphi} = (2, -i)$$

che scriviamo nella forma $(2, 0) \pm i(0, 1)$. Consideriamo quindi i due vettori reali

$$u = (2, 0) \quad v = (0, 1).$$

Quindi una base di autovettori (generalizzati) è data da u, v . In questo modo avremo

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e osserviamo inoltre che $S = Q^{-1}\tilde{S}Q = A$ che quindi è semisemplice e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\tilde{S}t)Q \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & -2e^{-t}\sin t \\ (1/2)e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ma allora la soluzione con dato iniziale $\xi(0) = \xi_0 = (x_0, y_0)$ è data da

$$\xi(t) = \exp(At)\xi_0 = \begin{pmatrix} x_0e^{-t}\cos t - y_02e^{-t}\sin t \\ (x_0/2)e^{-t}\sin t + y_0e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = x_0e^{-t}\cos t - y_02e^{-t}\sin t \\ y(t) = \frac{x_0}{2}e^{-t}\sin t + y_0e^{-t}\cos t \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. Notiamo immediatamente che la matrice A si può scrivere nella forma

$$A = \mathbb{1} + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

con $N^4 = (0)_{i,j}$ e chiaramente $[\mathbb{1}, N] = 0$, perciò

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \exp(\mathbb{1}t) \left(\mathbb{1} + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 + \frac{1}{3!}N^3t^3 \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14t^2 & 1 & 4t & 0 \\ 7t & 0 & 1 & 0 \\ 14t^3 + (35/2)t^2 + t & 3t & 6t^2 + 5t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 14t^2e^t & e^t & 4te^t & 0 \\ 7te^t & 0 & e^t & 0 \\ (14t^3 + (35/2)t^2 + t)e^t & 3te^t & (6t^2 + 5t)e^t & e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e quindi la soluzione con dato iniziale $x(0) = (1, 1, 2, 0)$ è

$$x(t) = \exp(At)x(0) = \begin{pmatrix} e^t \\ (14t^2 + 1 + 8t)e^t \\ (7t + 2)e^t \\ (14t^3 + (59/2)t^2 + 14t)e^t \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 4. Cominciamo immediatamente col distinguere il caso $\alpha = 0$ dal caso $\alpha \neq 0$. Infatti se $\alpha = 0$ allora possiamo scrivere

$$A = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $[\mathbb{1}, N] = 0$ e $N^2 = (0)_{ij}$. Ma allora

$$\exp(At) = \exp(\mathbb{1}t)(\mathbb{1} + Nt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{01}e^t \\ x_{01}te^t + x_{02}e^t \end{pmatrix}$$

Se invece $\alpha \neq 0$ allora il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (1 - \lambda)^2 - \alpha$$

e quindi lo spettro dell'operatore è dato da $\Sigma(A) = \{1 + \sqrt{\alpha}, 1 - \sqrt{\alpha}\}$. Consideriamo quindi il caso $\alpha > 0$, poniamo $\omega = \sqrt{\alpha}$ e calcoliamo gli autospazi; $E^*(1 + \omega)$ è dato da

$$\begin{cases} -\omega x_1 + \omega^2 x_2 = 0 \\ x_1 - \omega x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(1 + \omega) = \{(\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$$

Analogamente si verifica che

$$E^*(1 - \omega) = \{(-\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$$

pericò troviamo una base di autovettori è data da

$$u = (\omega, 1) \quad v = (-\omega, 1)$$

e quindi

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 + \omega & 0 \\ 0 & 1 - \omega \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \omega & -\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \implies \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che $A = Q^{-1}\tilde{S}Q$ e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\tilde{S}t)Q \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{(1+\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-\omega)t} \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) & \frac{\omega e^t}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \\ \frac{e^t}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) & \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dunque la soluzione generale sarà

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})x_{01} + \frac{\omega e^t}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})x_{02} \\ \frac{e^t}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})x_{01} + \frac{e^t}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})x_{02} \end{pmatrix}$$

Infine nel caso $\alpha < 0$ se poniamo $\omega = i\sqrt{|\alpha|}$ possiamo procedere esattamente come nel caso $\alpha > 0$; la soluzione sarà però espressa in termini di numeri complessi. D'altra parte notiamo che

$$\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \cos \sqrt{|\alpha|}t \quad \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2i} = \sin \sqrt{|\alpha|}t$$

e quindi

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos \sqrt{|\alpha|}t x_{01} - \sqrt{|\alpha|}e^t \sin \sqrt{|\alpha|}t x_{02} \\ \frac{e^t}{\sqrt{|\alpha|}} \sin \sqrt{|\alpha|}t x_{01} + e^t \cos \sqrt{|\alpha|}t x_{02} \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 5. Per prima cosa calcoliamo lo spettro di A il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 20),$$

e quindi lo spettro di A è $\Sigma(A) = \{0, 5 + \sqrt{5}, 5 - \sqrt{5}\}$. Calcoliamo quindi gli autospazi. $E(0) = \text{Ker}(A)$ è dato da

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

perciò

$$E(0) = \{(s, s, 0) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}.$$

$E(5 + \sqrt{5}) = \text{Ker}(A - (5 + \sqrt{5})\mathbf{1})$ è dato da

$$\begin{cases} -(4 + \sqrt{5})x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - (2 + \sqrt{5})x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + (1 - \sqrt{5})x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}x_3 \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}x_3 \end{cases}$$

da cui

$$E(5 + \sqrt{5}) = \{((3 - \sqrt{5})s, (1 + \sqrt{5})s, 4s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}.$$

Analogamente otteniamo

$$E(5 - \sqrt{5}) = \{((3 + \sqrt{5})s, (1 - \sqrt{5})s, 4s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\}.$$

Pertanto una base di autovettori è data da

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0) \\ v_2 &= ((3 - \sqrt{5}), (1 + \sqrt{5}), 4) \\ v_3 &= ((3 + \sqrt{5}), (1 - \sqrt{5}), 4) \end{aligned}$$

In questo modo avremo

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 5 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - \sqrt{5} & 3 + \sqrt{5} \\ 1 & 1 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ \implies Q &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -\sqrt{5}/20 & \sqrt{5}/20 & (5 + \sqrt{5})/40 \\ \sqrt{5}/20 & -\sqrt{5}/20 & (5 - \sqrt{5})/40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e osserviamo inoltre che $S = Q^{-1}\tilde{S}Q = A$ che quindi è semisemplice e quindi

$$\begin{aligned}\exp(At) &= Q^{-1}\exp(\tilde{S}t)Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3-\sqrt{5} & 3+\sqrt{5} \\ 1 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(5+\sqrt{5})t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(5-\sqrt{5})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -\sqrt{5}/20 & \sqrt{5}/20 & (5+\sqrt{5})/40 \\ \sqrt{5}/20 & -\sqrt{5}/20 & (5-\sqrt{5})/40 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione con dato iniziale $x(0) = (1, 1, 1)$ è data da

$$x(t) = \begin{pmatrix} (10 + (5 + \sqrt{5})e^{(5-\sqrt{5})t} + (5 - \sqrt{5})e^{(5+\sqrt{5})t})/20 \\ (10 + (5 - 3\sqrt{5})e^{(5-\sqrt{5})t} + (5 + 3\sqrt{5})e^{(5+\sqrt{5})t})/20 \\ ((5 - \sqrt{5})e^{(5-\sqrt{5})t} + (5 + \sqrt{5})e^{(5+\sqrt{5})t})/10 \end{pmatrix}$$

In particolare osserviamo che nella base degli autovettori possiamo scrivere il sistema nella forma

$$\dot{x} = \tilde{S}x$$

e in tale base si vede chiaramente che il moto è planare e si svolge su un piano (affine) parallelo al piano (vettoriale) descritto da $\{\xi_1 = 0\}$, dove con ξ_1 indichiamo la prima componente di un vettore ξ rispetto alla base degli autovettori, che scritto nelle coordinate di partenza è $\{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Il piano affine corrispondente dipende dal dato iniziale; in particolare, poiché $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ e $x_3(0) = 1$ avremo che il piano del moto è $\{x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$.

ESERCIZIO 6. La matrice A può essere vista come rappresentazione (rispetto a una data base) di un operatore lineare $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Per il Teorema 4.8 sulle dispense del corso, sappiamo che esiste una base in cui T è rappresentato da una matrice in forma canonica di Jordan (complessificata). In altre parole possiamo scrivere $A = Q^{-1}JQ$ dove Q è matrice di cambiamento di base e J è una matrice in forma canonica, ossia è del tipo

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda_{n_r} \end{pmatrix}$$

dove $n_1 + \dots + n_r = n$ e Λ_{n_i} sono blocchi elementari di Jordan. Si osservi che se si hanno autovalori complessi, questi saranno a due a due coniugati dato che provengono da un operatore reale. Ma allora

$$\begin{aligned}\det(\exp(A)) &= \det(Q^{-1}\exp(J)Q) \\ &= \det(Q^{-1})\det(\exp(J))\det(Q) \\ &= \det(\exp(J)) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} \\ &= e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \\ &= e^{\text{tr}(J)} \\ &= e^{\text{tr}(Q^{-1}JQ)} \\ &= \exp(\text{tr}(A)),\end{aligned}$$

dove nella quarta uguaglianza si è usato il fatto che possiamo scrivere $J = \Lambda + N$ con Λ matrice diagonale e N matrice nilpotente tali che $[N, \Lambda] = 0$. Chiaramente

$$\det(\exp(\Lambda)) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i}$$

e d'altra parte $\exp(N)$ è uguale all'identità più una matrice strettamente diagonale inferiore e quindi ha determinante uguale a uno.

ESERCIZIO 7.

(5.1) Certamente $S \subset C^\infty(\mathbb{R}, E)$; infatti se E ha dimensione finita allora, scelta una base per E esiste una matrice A che rappresenta T in quella base e quindi possiamo scrivere l'insieme S come

$$S = \{x(t) = \exp(At)x_0 : x_0 \in E\}.$$

Siano quindi $x(t), y(t) \in S$. Allora

$$x(t) + y(t) = \exp(At)x_0 + \exp(At)y_0 = \exp(At)(x_0 + y_0)$$

ovvero $x(t) + y(t) \in S$. Inoltre $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda x(t) = \lambda \exp(At)x_0 = \exp(At)\lambda x_0$ ovvero $\lambda x(t) \in S$ e quindi S è un sottospazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R}, E)$. Infine se consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow S \\ x_0 &\longmapsto \exp(At)x_0 \end{aligned}$$

notiamo immediatamente che è suriettiva e $\text{Ker}(\phi) = \{x_0 \in E : \phi(x_0) = 0\} = \{0\}$ perciò ϕ è anche iniettiva. Inoltre

$$\phi(ax_0 + by_0) = \exp(At)(ax_0 + by_0) = a\phi(x_0) + b\phi(y_0)$$

perciò si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali.

(5.2) Innanzitutto osserviamo che certamente la derivata è un'applicazione lineare su S . Inoltre la derivata è un operatore su S , ossia se $x(t) \in S$ allora $[dx/dt] := \dot{x}(t) \in S$. Infatti poiché $\dot{x}(t) = T(x)$ avremo che

$$\ddot{x} = T(\dot{x})$$

e quindi $\dot{x} \in S$. Supponiamo quindi che E abbia dimensione finita e mostriamo che se $x(t) = \exp(At)x_0 \in S$ è autovettore della derivata allora $s_0 \in E$ è autovettore di A . Infatti x è autovettore di $[d/dt]$ se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $[dx/dt] = \lambda x$. D'altra parte $[dx/dt] = Ax$ e quindi x è autovettore se e solo se $\lambda x = Ax$, e ciò è possibile se e solo se $\lambda \exp(At)x_0 = A \exp(At)x_0$. Ora se $[A, \exp(At)] = 0$, allora $\lambda \exp(At)x_0 = A \exp(At)x_0$ se e solo se $\exp(At)\lambda x_0 = \exp(At)Ax_0$, e questo è vero se e solo se $\lambda x_0 = Ax_0$ ovvero se e solo se x_0 è autovettore di A . Rimane dunque da mostrare che $[A, \exp(At)] = 0$.

$$\begin{aligned} A \exp(At) &= A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \\ &= A \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A \left(\sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!} \right) A \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right) A \\ &= \exp(At)A \end{aligned}$$