Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato XI - Livia Corsi (15-05-2008)

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1.

1.1. Trasformazione rigida. Cominciamo con l'osservare che il sistema dinamico planare che individua la curva $\gamma(t)$ ammette una costante del moto data da

$$H(x,y) = y(y - x^2 + 1)$$

Inoltre la posizione iniziale di O' ci garantisce che $\mathbf{q}_{O'}(t)$ è la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = H(0,-1) = 0\}$$

che possiamo scrivere come $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ con

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad \mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\}.$$

Inoltre il moto di O' si svolgerà esclusivamente lungo la curva

$$\mathcal{C}_2^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, \, -1 < x < 1\}$$

perché il dato iniziale si trova in $\mathcal{C}_2^*$.

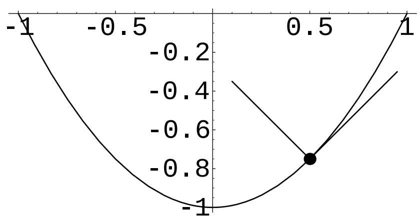

Figura 1. Moto del sistema K.

Ma allora sostituendo $y = x^2 - 1$ nella prima equazione del sistema, troviamo

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

e risolvendo per separazione di variabili avremo

$$\log\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| = 2t$$

ovvero, tenendo conto che $|x| < 1$,

$$x(t) = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

e quindi troviamo che

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{q}_{O'}(t) = \left(\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}},\, \left(\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)^2 - 1,\, 0\right)$$

La rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\mathrm{tg}\theta(t) = \dot{y}_{O'}/\dot{x}_{O'}$ ma allora

$$\mathrm{tg}\theta(t) = \frac{2x(t)y(t)}{2y(t) - x^2(t) + 1} = \frac{2x(t)(x^2(t)-1)}{x^2(t)-1} = 2x(t) = 2\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

e quindi

$$\theta(t) = \mathrm{arctg}\left(2\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)$$

1.2. Legge del moto nel sistema K. Poiché P si muove esclusivamente lungo l'asse ξ, la legge del moto nel sistema relativo sarà della forma

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Modo 1). Poiché il punto si muove sotto l'azione di un potenziale conservativo a energia nulla, possiamo scrivere la legge

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$\dot{\xi} = \pm\sqrt{-2V(\xi)}$$

dove il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale. Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_0^\xi \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\sqrt{2}t$$

ovvero

$$\xi(t) = \pm\sin\sqrt{2}t$$

(Modo 2). L'equazione del moto di P è data da

$$\ddot{\xi} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -2\xi$$

la cui soluzione generale è

$$\xi(t) = c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t$$

con c_1 e c_2 costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Sostituendo il dato iniziale $\xi(0) = 0$ troviamo che deve essere $c_1 = 0$ e quindi $\xi(t) = c_2\sin\sqrt{2}t$. Dalla legge di conservazione dell'energia inoltre, sappiamo che deve valere

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$c_2^2\cos^2\sqrt{2}t + c_2^2\sin^2\sqrt{2}t - 1 = 0$$

e quindi $c_2 = \pm 1$ e il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale, ovvero

$$\xi(t) = \pm\sin\sqrt{2}t$$

Legge del moto in κ. Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}(t)$, ovvero

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= B\begin{pmatrix}\xi(t)\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_{O'}(t)\\y_{O'}(t)\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\xi(t)\cos\theta(t) + x_{O'}(t)\\ \xi(t)\sin\theta(t) + y_{O'}(t)\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1.3. Velocità assoluta. Derivando il vettore $\mathbf{q}(t)$ troviamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix}\dot{\xi}(t)\cos\theta(t) - \xi(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \dot{x}_{O'}(t)\\ \dot{\xi}(t)\sin\theta(t) + \xi(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) + \dot{y}_{O'}(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

dove ovviamente

$$\begin{array}{ll} \dot{\xi}(t) & = \pm\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \dot{\theta}(t) & = \frac{(1+e^{2t})^2}{3-2e^{2t}+3e^{4t}} \\ \dot{x}_{O'}(t) & = \left(\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)^2 - 1 \\ \dot{y}_{O'}(t) & = 2\left(\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)^3 - 2\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}} \end{array}$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P in K troviamo $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (\dot{x}(t), 0, 0)$, perciò la velocità relativa é

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t)\cos\theta(t) \\ \dot{\xi}(t)\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Componente traslatoria. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (\dot{x}_{O'}(t), \dot{y}_{O'}(t), 0)$.

1.5. Componente rotatoria. Poiché l'asse di rotazione del sistema mobile si mantiene parallelo all'asse z di κ, abbiamo $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Da ciò otteniamo quindi $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\dot{\theta}(t)\xi(t)\cos\theta(t), \dot{\theta}(t)\xi(t)\sin\theta(t), 0)$.

1.6. Forza centrifuga. Dall'esercizio 2 sappiamo che la forza centrifuga è proporzionale al vettore che individua P nel piano $O'\xi\eta$ e più precisamente $F_{\text{cf}} = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$.

Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ unitamente al fatto che, poiché l'asse di rotazione di K si mantiene parallelo all'asse z di κ, si ha $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)$, otteniamo $F_{\text{cor}} = (0, -2\dot{\theta}(t)\dot{\xi}(t), 0)$.

<u>Esercizio 2.</u>

Poiché l'asse z si mantiene parallelo all'asse ζ, allora avremo che $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t))$ dove $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione del sistema K; scriviamo inoltre $\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3)$ dove $\{z = Q_3\}$ è il piano su cui si svolge il moto. Ma allora la forza centrifuga è data da $F_{\text{cf}} = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ e si vede facilmente che $F_{\text{cf}} = m\dot{\theta}^2(t)(Q_1(t), Q_2(t), 0)$ ovvero è proporzionale alla proiezione su $\{z = 0\}$ di $\mathbf{Q}(t)$.

Se il sistema ruota con velocità angolare costante allora $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega)$ con $\omega = \dot{\theta}(t)$ costante. Sappiamo che la forza di Coriolis è data da $F_{\text{cor}} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ e quindi in generale è $F_{\text{cor}} = 2m\omega(\dot{Q}_2, -\dot{Q}_1, 0)$. Se P si muove lungo una circonferenza centrata sull'asse z (ad altezza Q_3) allora $\mathbf{Q}(t) = (R\cos\alpha t, R\sin\alpha t, Q_3)$ dove α è la velocità angolare del punto e R è il raggio della circonferenza. In tal caso la forza di Coriolis è data da $F_{\text{cor}} = 2m\omega\alpha(R\cos\alpha t, R\sin\alpha t, 0)$. Viceversa se la forza di Coriolis è proporzionale alla proiezione su $\{z = 0\}$ di $\mathbf{Q}(t)$, allora impostiamo il sistema

$$\begin{cases} 2m\omega\dot{Q}_2 = aQ_1, \\ 2m\omega\dot{Q}_1 = -aQ_2, \end{cases}$$

dove a è la costante di proporzionalità. Risolvendo il sistema troviamo che le soluzioni generali sono

$$\begin{cases} Q_1(t) = c_2 \cos\left(\frac{a}{2m\omega} t\right) - c_1 \sin\left(\frac{a}{2m\omega} t\right), \\ Q_2(t) = c_1 \cos\left(\frac{a}{2m\omega} t\right) + c_2 \sin\left(\frac{a}{2m\omega} t\right), \end{cases}$$

che possiamo sempre scrivere nella forma

$$\begin{cases} Q_1(t) = R\cos\left(\frac{a}{2m\omega} t + \phi\right), \\ Q_2(t) = R\sin\left(\frac{a}{2m\omega} t + \phi\right), \end{cases}$$

con R e ϕ opportuni.

<u>Esercizio 3.</u>

3.1. Trasformazione rigida. Il vettore che individua O' nel sistema κ è dato da $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B(t) = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione. Notiamo che il versore $\hat{\eta}$ si mantiene parallelo alla proiezione sul piano $\{z = 0\}$ di $\mathbf{r}(t)$ e quindi $\theta(t) = t$. Pertanto la trasformazione rigida è data da

$$\mathbf{q}(t) = B^{(3)}(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t).$$

3.2 Legge del moto. Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\eta(t) = e^{2t}$$

quindi la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (0, e^{2t}, 0)$, mentre in κ avremo

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - e^{2t}\sin t \\ \sin t + e^{2t}\cos t \\ t \end{pmatrix}$$

3.3 Velocità assoluta. Derivando il vettore $\mathbf{q}(t)$ troviamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -(1 + 2e^{2t})\sin t - e^{2t}\cos t \\ (1 + 2e^{2t})\cos t - e^{2t}\sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Velocità relativa. Semplicemente $\dot{\mathbf{Q}} = 2\mathbf{Q} = (0, 2e^{2t}, 0)$, quindi

$$\mathbf{v}' = B^{(3)}\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -2e^{2t}\sin t \\ 2e^{2t}\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.4. Componente traslatoria. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo immediatamente $\mathbf{v}_0 = (-\sin t, \cos t, 1)$.

3.5. Componente rotatoria. Sappiamo che $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$ con $|\boldsymbol{\omega}| = 1$ e, siccome l'asse di rotazione si mantiene parallelo a z di κ, avremo $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = \begin{pmatrix} -e^{2t}\cos t \\ -e^{2t}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.6. Forza centrifuga. Per quanto dimostrato nell'Esercizio 2, la forza centrifuga è $F_{\text{cf}} = (0, e^{2t}, 0)$.

3.7. Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{cor}} = (4e^{2t}, 0, 0)$.