Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato XII - Livia Corsi (23-05-2008)

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1.

1.1. Trasformazione rigida. L'origine O' del sistema di riferimento mobile oscilla lungo la parabola $y = y(x) = x^2$ con legge $x_{O'}(t) = \sin t$. Quindi $y_{O'}(t) = \sin^2 t$ e il vettore $\mathbf{r}$ che individua O' nel sistema di riferimento fisso è dato da

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \big(\sin t, \sin^2 t, 0\big)\,.$$

L'angolo $\theta(t)$ che l'asse ξ del sistema mobile forma con l'asse x del sistema fisso è tale che

$$\tan\theta(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_{O'}(t)) = 2\sin t,$$

quindi C è la traslazione di $\mathbf{r}$ e B è la rotazione di $\theta(t)$ intorno all'asse z, i.e.

$$B = B(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

con $\theta(t) = \arctan 2\sin t$.

1.2. Soluzione dell'equazione del moto. Nel sistema mobile si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (t, 0, 0)\,,$$

per ipotesi. Quindi nel sistema fisso

$$\mathbf{q}(t) = B(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\theta(t) + \sin t \\ t\sin\theta(t) + \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{q}(t) = \big(t\cos\theta(t) + \sin t, t\sin\theta(t) + \sin^2 t, 0\big)\,.$$

1.3. Velocità assoluta. Si ha

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \Big(\cos\theta(t) - t\sin\theta(t)\dot\theta(t) + \cos t, \sin\theta(t) + t\cos\theta(t)\dot\theta(t) + 2\sin t\cos t, 0\Big)\,,$$

dove

$$\dot\theta(t) = \frac{2\cos t}{1 + 4\sin^2 t}.$$

1.4. Velocità relativa. Si ha

$$\mathbf{v}' = B(t)\dot{\mathbf{Q}}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0)\,,$$

poiché $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (1, 0, 0)$.

1.5. Componente traslatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, 2\sin t\cos t, 0)\,.$$

1.6. Componente rotatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t)] = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \dot\theta(t) \\ t\cos\theta(t) & t\sin\theta(t) & 0 \end{pmatrix} = \Big(-t\sin\theta(t)\dot\theta(t), t\cos\theta(t)\dot\theta(t), 0\Big)\,,$$

ed è immediato verificare che $\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T = \mathbf{v}$.

1.7. Forza di Coriolis. Dalla definizione di forza di Coriolis si ha

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Cor}} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] = -2\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \dot\theta(t) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Big(0, -2\dot\theta(t), 0\Big)\,,$$

dove si è usato che $m = 1$.

1.8. Forza centrifuga. Si ha

$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \dot\theta(t) \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Big(0, t\dot\theta(t), 0\Big)\,,$$

e quindi dalla definizione di forza centrifuga

$$\mathbf{F}_{\mathrm{cf}} = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \dot\theta(t) \\ 0 & t\dot\theta(t) & 0 \end{pmatrix} = \Big(t\dot\theta^2(t), 0, 0\Big)\,.$$

1.9. Tempi di attraversamento. La traiettoria $t \to \mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), 0)$ attraversa l'asse x per t tale che $y(t) = 0$. Si ha

$$y(t) = t\sin\theta(t) + \sin^2 t, \qquad \sin\theta(t) = \frac{\tan\theta(t)}{\sqrt{1 + \tan^2\theta(t)}} = \frac{2\sin t}{\sqrt{1 + 4\sin^2(t)}},$$

quindi $y(t) = 0$ diventa

$$\sin t\left(\frac{2t}{\sqrt{1 + 4\sin^2 t}} + \sin t\right) = 0.$$

Poiché $1 \le 1 + 4\sin^2(t) \le 5$, e quindi

$$\frac{2t}{\sqrt{5}} \le \frac{2t}{\sqrt{1 + 4\sin^2 t}} \le 2t,$$

mentre $|\sin t| \le 1$, la funzione

$$\frac{2t}{\sqrt{1 + 4\sin^2 t}} + \sin t$$

non si annulla mai, e quindi $y(t) = 0$ se e solo se $\sin t = 0$. La funzione $\sin t$ si annulla infinite volte, ogni qual volta si abbia $t = t_k = \pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Quindi i tempi di attraversamento sono dati dai tempi della successione $\{t_k\}$.

<u>Esercizio 2.</u>

2.1. Grafico dell'energia potenziale per $\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$ l'energia potenziale diventa

$$V(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2\beta x.$$

Si ha

$$V'(x) = 2x^2 - 2\beta, \qquad V''(x) = 4x,$$

così che si ha $V'(x) = 0$ per $x^2 = \beta$. Quindi se $\beta > 0$ si hanno due punti stazionari $x = \pm x_\beta$, dove $x_\beta = \sqrt{\beta}$, se $\beta = 0$ si ha un solo punto stazionario $x = 0$ e se $\beta < 0$ non si hanno punti stazionari. Inoltre se $\beta > 0$ si ha $V''(x_\beta) = 4\sqrt{\beta} > 0$ e $V''(-x_\beta) = -4\sqrt{\beta} < 0$: quindi $x = x_\beta$ è un punto di minimo e $x = -x_\beta$ è un punto di massimo. Notando che $V(0) = 0$ si può dedurre che $-V(x_\beta) > 0$ e $V(x_\beta) < 0$. Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \pm\infty,$$

indipendentemente da β. Infine $V'(x) > 0$ per ogni x se $\beta < 0$ e per ogni $x \neq 0$ se $\beta = 0$. Se $\beta = 0$ si ha $V''(0) = 0$, quindi in tale caso $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale.

Quindi il grafico dell'energia potenziale è come rappresentato in Figura 1 per $\beta < 0$, in Figura 2 per $\beta = 0$ e in Figura 3 per $\beta > 0$.

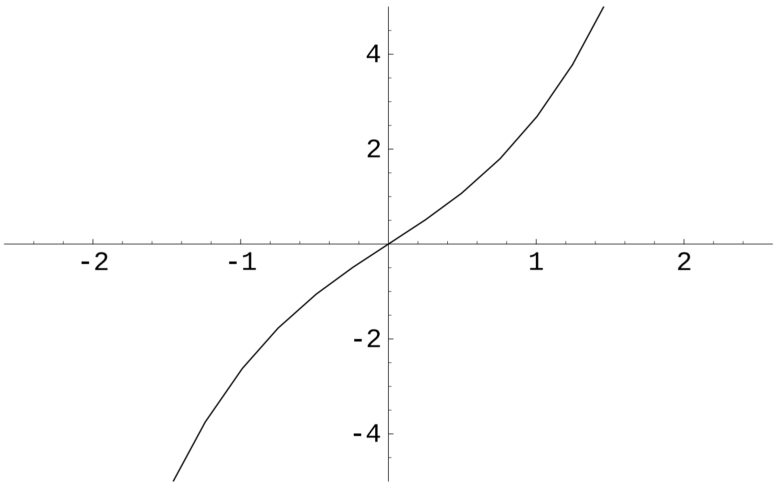

Figura 1. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta < 0$.

2.2. Punti d'equilibrio per $\alpha = 0$. Il sistema dinamico associato al sistema meccanico unidimensionale dato è

$$\begin{cases} \dot{x} = my, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

quindi i punti d'equilibrio corrispondenti sono i punti $(x_0, 0)$, con $V'(x_0) = 0$.

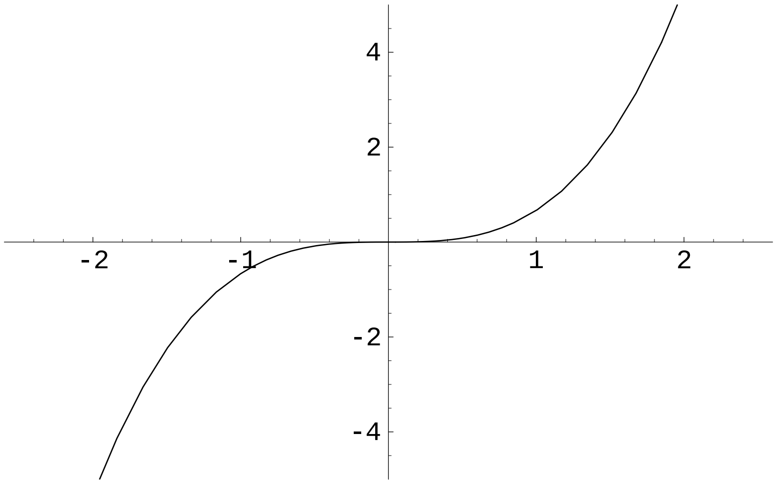

Figura 2. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

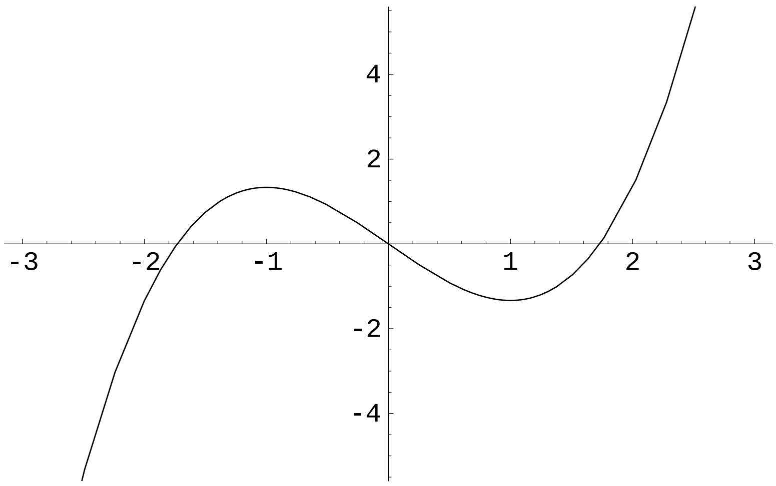

Figura 3. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

Se $\beta < 0$ non ci sono punti d'equilibrio. Se $\beta = 0$ c'è il solo punto d'equilibrio $(0, 0)$. Se $\beta > 0$ avremo due punti d'equilibrio: $(x_\beta, 0)$ e $(-x_\beta, 0)$.

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio per $\alpha = 0$. Per $\beta = 0$ il punto d'equilibrio $(0, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile perché corrisponde a un punto di flesso orizzontale.

Per $\beta > 0$ il punto d'equilibrio $(x_\beta, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile, per il teorema di Dirichlet (dal momento che corrisponde a un punto di minimo isolato per l'energia potenziale), mentre $(-x_\beta, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile perché corrisponde a un punto di massimo.

2.4. Analisi qualitativa per $\alpha = 0$. Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} m y^2 + V(x) = E \right\}$$

dell'energia del sistema. Se definiamo

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(x) \right)},$$

in modo da poter riscrivere

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm F(x) \right\},$$

si ha

$$F'(x) = \sqrt{\frac{6}{m}} \, \frac{\beta - x^2}{\sqrt{3E + 6\beta x - 2x^3}},$$
$$F''(x) = \sqrt{\frac{6}{m}} \, \frac{-3\beta^2 - 6Ex - 6\beta \, x^2 + x^4}{(3E + 6\beta x - 2x^3)^{3/2}}.$$

Poiché Γ_E è simmetrica rispetto all'asse x, è sufficiente studiarla nel semipiano superiore $y \geq 0$. Inoltre i versi di percorrenza delle orbite saranno, in tale semipiano, sempre da sinistra a destra poiché $\dot{x} = my \geq 0$.

Dai grafici delle Figure 1÷3 vediamo che, per ogni valore di β, $\Gamma_E \neq \emptyset$ per ogni valore di $E \in \mathbb{R}$.

Distinguiamo i casi $\beta < 0$, $\beta = 0$ e $\beta > 0$.

Per $\beta < 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 4. Infatti per $\beta < 0$ si ha $F'(x) < 0$, quindi $F(x)$ è strettamente decrescente per ogni valore di E. Inoltre per ogni valore fissato di E la funzione $F(x)$ è definita per $x \leq x_E$, dove x_E è l'unica radice di $E - V(x) = 0$. In $x = x_E$ si ha $F'(x_E) = -\infty$, quindi la curva di livello Γ_E in $x = x_E$ ha tangente verticale. Inoltre $F(x) \sim \text{const.} x^{3/2}$ per $x \to -\infty$, quindi poiché $F(x)$ è concava per $x \to 0$ e convessa per $x \to -\infty$ deve esserci almeno un punto in cui la funzione cambia concavità.

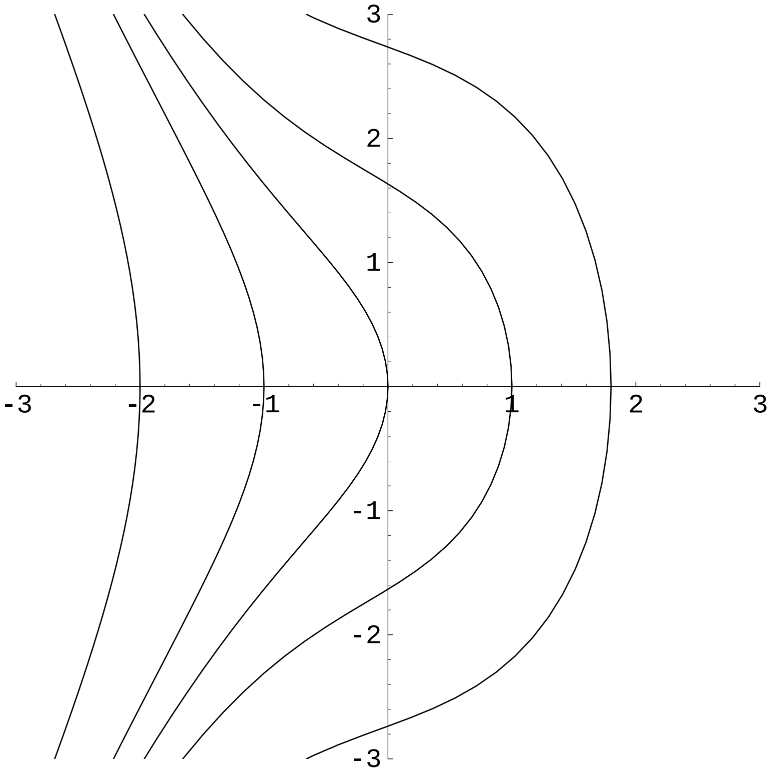

Figura 4. Piano delle fasi per $\alpha = 0$ e $\beta < 0$.

Per $\beta = 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 5. In tal caso per ogni valore di $E \neq 0$ si ha $F'(x) < 0$ tranne che per $x = 0$ dove $F'(0) = 0$; inoltre, definendo di nuovo x_E l'unica radice di $E - V(x) = 0$, per $E \neq 0$ si ha che $F(x)$ è definita per $x \leq x_E$, $F'(x) < 0$ per $x \neq x_E$ e $F'(x_E) = -\infty$.

Il caso $E = 0$ va discusso a parte perché per determinare il valore di $F'(x)$ in $x = x_E = x_0 = 0$ si deve tener conto che, in tal caso, per $x = 0$ si annullano sia il numeratore sia il denominarore di $F'(x)$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{3E + 6\beta x - 2x^3}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{-2x^3}} = \lim_{x \to 0^-} |x|^{1/2} = 0,$$

quindi la derivata di $F(x)$ si annulla in $x = 0$, i.e. la funzione $F(x)$ ha tangente orizzontale in $x = 0$, ovvero Γ_0 forma una cuspide in $x = 0$.

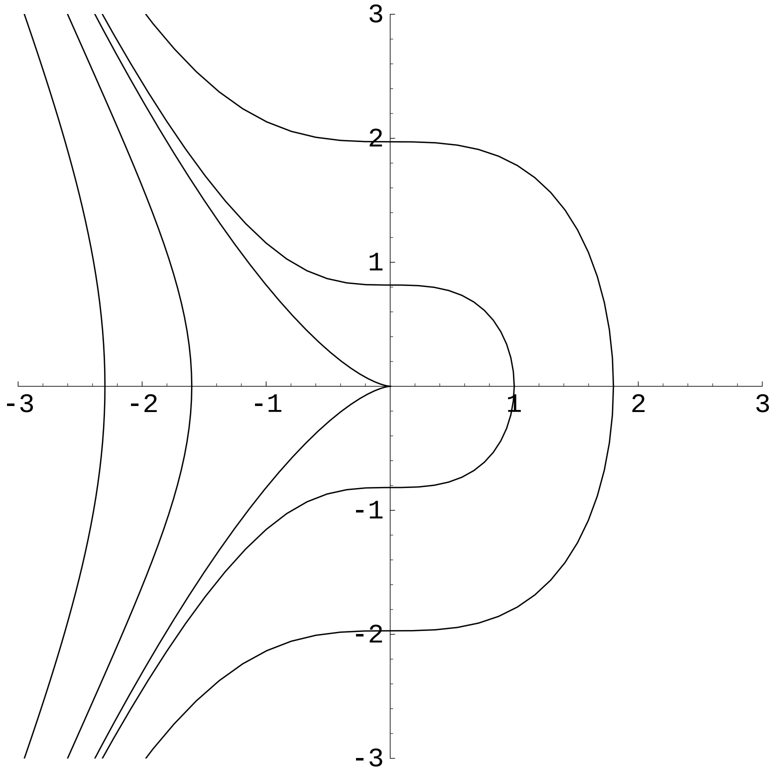

Figura 5. Piano delle fasi per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Per $\beta > 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 6. In tal caso, infatti, per disegnare le curve di livello dobbiamo distinguere i casi (i) $E < E_1$, (ii) $E = E_1$, (iii) $E_1 < E < E_2$, (iv) $E = E_2$ e (v) $E > E_2$, dove $E_1 = V(x_\beta)$ ed $E_2 = V(-x_\beta)$.

Caso (i). Per $E < E_1$ l'equazione $E - V(x) = 0$ ha una sola radice $x = x_E$, e risulta $\Gamma_E = \gamma_E$, dove la γ_E definisce una curva aperta con grafico $x \to \pm F(x)$, definita per $x \leq x_E$, tale che $F(x)$ è strettamente decrescente e interseca l'asse x in $x = x_E$ con tangente verticale.

Caso (ii). Per $E = E_1$ si ha $\Gamma_{E_1} = \gamma_{E_1} \cup \{(x_\beta, 0)\}$, dove γ_{E_1} è qualitativamente simile alle curve γ_E del caso (i), mentre $(x_\beta, 0)$ è il punto d'equilibrio stabile.

Caso (iii). Per $E \in (E_1, E_2)$ l'equazione $E - V(x) = 0$ ammette tre radici distinte $x_E < x_E^1 < x_E^2$. Si ha allora $\Gamma_E = \gamma_E \cup \delta_E$, dove γ_E è di nuovo qualitativamente simile ai casi precedenti, mentre δ_E è una curva chiusa che interseca l'asse x nei due punti x_E^1 e x_E^2. Tale curva è una curva regolare simmetrica rispetto all'asse x: in particolare la tangente alla curva in $x = x_E^1$ e in $x = x_E^2$ è verticale, e in $x = x_\beta$ è orizzontale. La traiettoria che ha supporto in δ_E è periodica.

Caso (iv). Per $E = E_2$ la curva di livello Γ_E rappresenta una separatrice costituita da 4 orbite distinte: il punto d'equilibrio instabile $(-x_\beta, 0)$, un'orbita omoclina definita per $-x_\beta < x < x'_{E_2}$ (se x'_{E_2} e $-x_\beta$

rappresentano le due radici dell'equazione $E - V(x) = 0$) e due orbite definite per $x < -x_\beta$, e asintotiche al punto d'equilibrio instabile (nel futuro quella nel semipiano superiore e nel passato quella nel semipiano inferiore). La tangente alla curva $F(x)$ in $x = -x_\beta$ è obliqua poiché $V''(-x_\beta) \neq 0$.

Caso (v). Per $E > E_2$ se definiamo x_E l'unica radice di $E - V(x) = 0$ si ha che la funzione $F(x)$ è definita per $x \leq x_E$. Inoltre $F'(x) > 0$ per $|x| < \sqrt{\beta}$, i.e. per $-x_\beta < x < x_\beta$, $F'(x) = 0$ per $x = \pm x_\beta$ e $F'(x) < 0$ altrimenti. In particolare $F'(x_E) = -\infty$, mentre $F'(x)$ è finita per ogni altro valore di x.

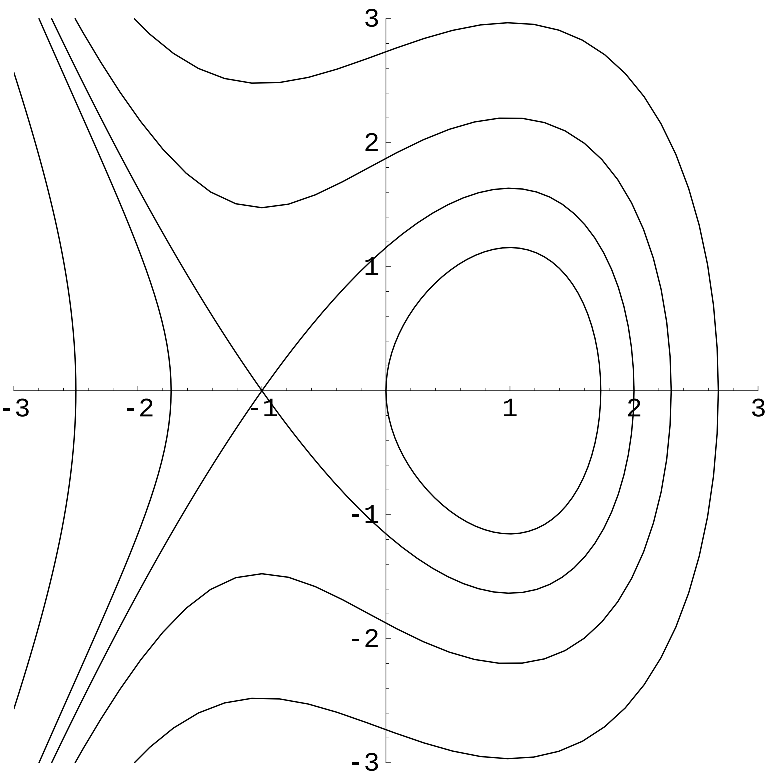

Figura 6. Piano delle fasi per $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

2.5. Discussione del caso $\alpha > 0$. Per $\alpha \neq 0$ l'energia potenziale è

$$V(x) = \frac{\alpha}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 - 2\beta x.$$

Si ha quindi

$$V'(x) = \alpha x^4 + 2x^2 - 2\beta, \qquad V''(x) = 4\alpha x^3 + 4x = 4x\left(\alpha x^2 + 1\right),$$

così che si ha $V'(x) = 0$ per

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2\alpha\beta}}{\alpha}.$$

Se $\alpha > 0$ si deve avere $\sqrt{1 + 2\alpha\beta} \geq 1$ perché almeno uno dei due valori sia positivo, quindi $2\alpha\beta \geq 0$, ovvero $\beta \geq 0$.

Possiamo concludere che per $\alpha > 0$ si hanno punti stazionari solo se $\beta \geq 0$, nel qual caso si deve prendere solo la determinazione positiva $x^2 = (\sqrt{1 + 2\alpha\beta} - 1)/\alpha$, che dà

$$\begin{cases} \text{per } \beta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0, \\ \text{per } \beta > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm x_0, \qquad x_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1 + 2\alpha\beta} - 1}{\alpha}}, \end{cases}$$

mentre per $\beta < 0$ non si hanno punti stazionari.

Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \pm\infty,$$

indipendentemente da β. Infine $V'(x) > 0$ per ogni x se $\beta < 0$ e per ogni $x \neq 0$ se $\beta = 0$. Se $\beta > 0$, tenendo conto degli andamenti asintotici di $V(x)$, possiamo concludere che $x = -x_0$ è un punto di massimo e $x = x_0$ è un punto di minimo.

Quindi la situazione è molto simile al caso $\alpha = 0$, e i grafici dell'energia potenziale $V(x)$ sono qualitativamente simili a quelli rappresentati in Figura 1 per $\beta < 0$, in Figura 2 per $\beta = 0$ e in Figura 3 per $\beta > 0$. In maniera analoga, anche l'analisi qualitativa del sistema può essere discussa come nel caso $\alpha = 0$, e qualitativamente si trovano orbite come rappresentate in Figura 4 per $\beta < 0$, in Figura 5 per $\beta = 0$ e in Figura 6 per $\beta > 0$.

<u>Esercizio 3.</u>

3.1. Equazione del moto e sistema dinamico associato. Il potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \alpha \log(1 + \rho^2) + \frac{L^2}{2\rho^2},$$

quindi l'equazione del moto è semplicemente

$$\ddot{\rho} = \frac{L^2}{\rho^3} - \frac{2\alpha\rho}{1 + \rho^2}.$$

Il sistema dinamico associato è quindi

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y, \\ \dot{y} = \frac{L^2}{\rho^3} - \frac{2\alpha\rho}{1+\rho^2}. \end{cases}$$

3.2. Punti d'equilibrio e stabilità. I punti d'equilibrio sono i punti $(\rho_0, 0)$ con $V_{\text{eff}}'(\rho_0) = 0$, pertanto il problema si riduce alla ricerca delle soluzioni reali postivive dell'equazione

$$2\alpha\rho^2 - L^2(\rho^2 + 1) = 0.$$

Per $\alpha = 0$ si ha $V_{\text{eff}}'(\rho) = 0$ se e solo se $L = 0$ e in tal caso si ha equilibrio (stabile) per ogni $\rho_0 \in \mathbb{R}$, altrimenti non esistono punti d'equilibio.

Per $\alpha < 0$ di nuovo il sistema non ammette punti d'equilibrio. Infatti in questo caso $2\alpha\rho^2 - L^2(\rho^2+1) < 0$ per ogni scelta del momento angolare.

Infine per $\alpha > 0$ si ha un solo punto d'equilibrio $(0, \rho_0)$ con

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{L^2 + \sqrt{L^4 + 8\alpha L^2}}{4\alpha}}.$$

Inoltre si verifica facilmente che in tal caso il punto è stabile trattandosi di un punto di minimo isolato per il potenziale efficace.

3.3. Grafico del potenziale efficace. Intanto, se $\alpha = L = 0$ il potenziale efficace sarà costituito dalla semiretta $\{(\rho, 0), \rho > 0\}$, mentre se $\alpha = 0$, $L^2 \neq 0$ il grafico del potenziale efficace è rappresentato in Figura 7.

Se $\alpha < 0$ si ha

$$\lim_{\rho \to 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho \to +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty,$$

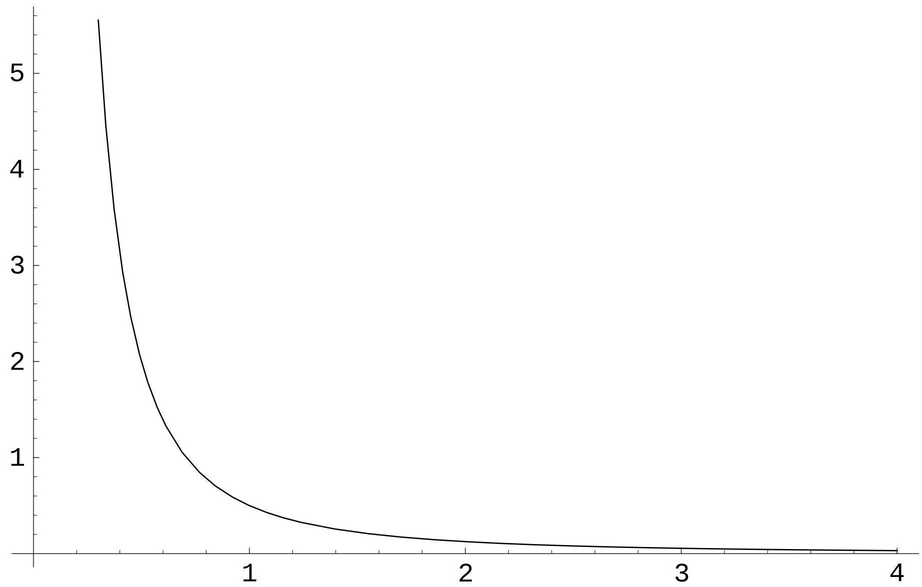

Figura 7. Potenziale efficace per $\alpha = 0$ e $L^2 \neq 0$.

mentre per $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{\rho \to 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho \to +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty,$$

Il grafico del potenziale efficace nei due casi è rappresentato in Figura 8 e Figura 9 rispettivamente.

3.4. Piano delle fasi. Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (\rho, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \frac{1}{2} y^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = E \right\}$$

dell'energia del sistema. Poiché Γ_E è simmetrica rispetto all'asse ρ, è sufficiente studiarla nel semipiano superiore $y \geq 0$. Inoltre i versi di percorrenza delle orbite saranno, in tale semipiano, sempre da sinistra a destra poiché $\dot{\rho} = y \geq 0$. Definiamo

$$F(\rho) = \sqrt{2\,(E - V_{\text{eff}}(\rho))}.$$

caso 1. Se $\alpha = 0$ e $L \neq 0$, per ogni valore fissato di $E > 0$ la funzione $F(\rho)$ è definita per $\rho \geq \rho_E$, dove ρ_E è l'unica radice di $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$. In $\rho = \rho_E$ si ha $F'(\rho_E) = -\infty$, quindi la curva di livello Γ_E in $\rho = \rho_E$ ha tangente verticale.

caso 2. Se $\alpha < 0$ allora per ogni valore fissato (senza restrinzioni) di E la funzione $F(\rho)$ è definita per $\rho \geq \rho_E$, dove ρ_E è l'unica radice di $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$. In $\rho = \rho_E$ si ha $F'(\rho_E) = -\infty$, quindi la curva di livello Γ_E in $\rho = \rho_E$ ha tangente verticale.

caso 3. Se $\alpha > 0$ allora per ogni valore fissato $E \geq V_{\text{eff}}(\rho_0)$ Γ_E è una curva chiusa che interseca l'asse ρ nei due punti ρ_E^1 e ρ_E^2. Tale curva è una curva regolare simmetrica rispetto all'asse ρ: in particolare la tangente alla curva in $\rho = \rho_E^1$ e in $\rho = \rho_E^2$ è verticale, e in $\rho = \rho_0$ è orizzontale. La traiettoria che ha supporto in Γ_E è periodica.

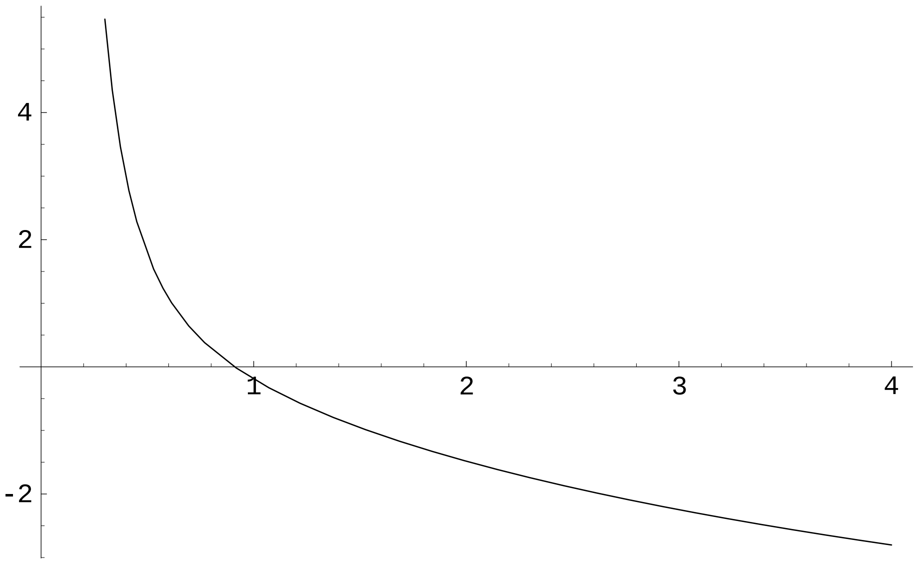

Figura 8. Potenziale efficace per $\alpha < 0$.

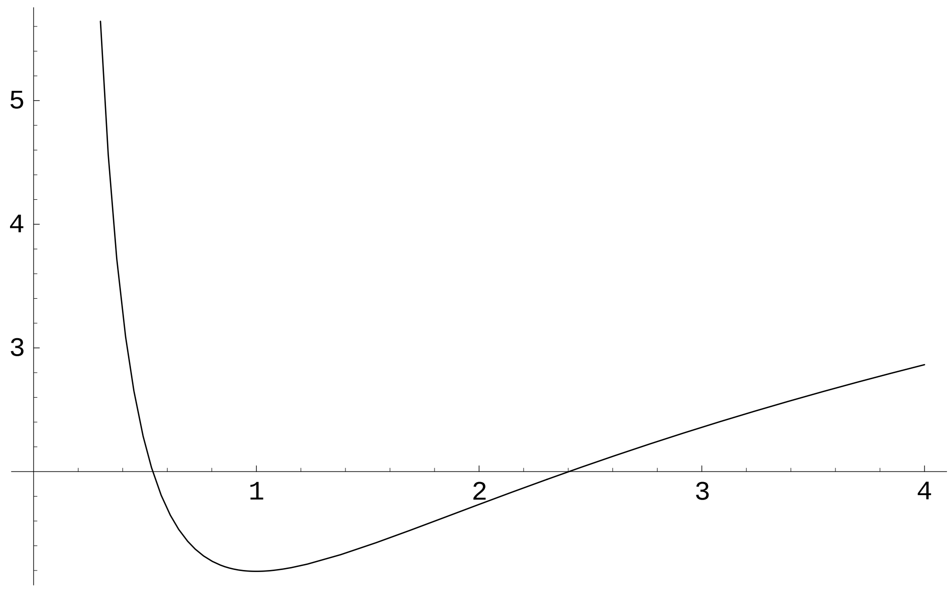

Figura 9. Potenziale efficace per $\alpha > 0$.

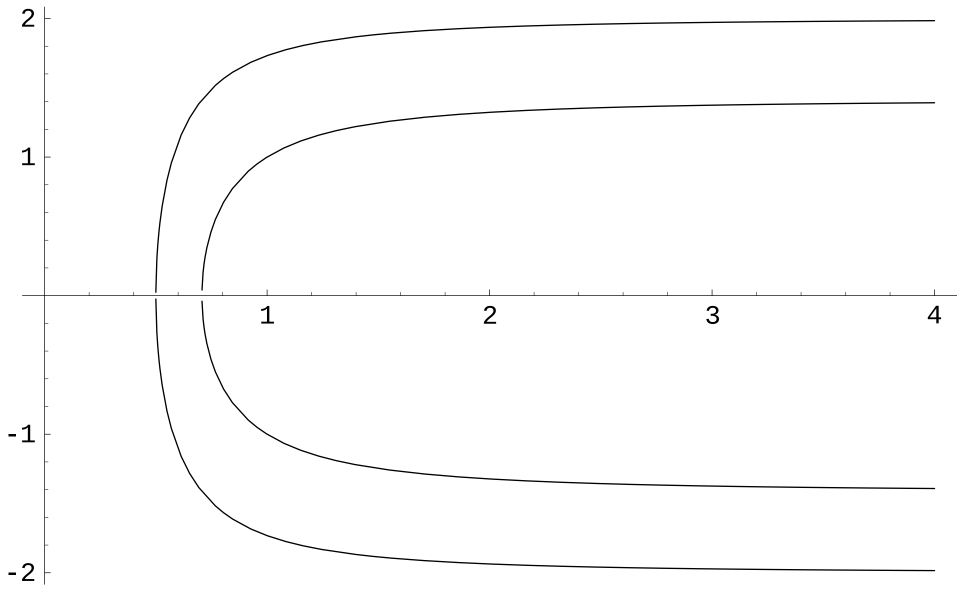

Figura 10. Piano delle fasi per $\alpha = 0$, $L \neq 0$.

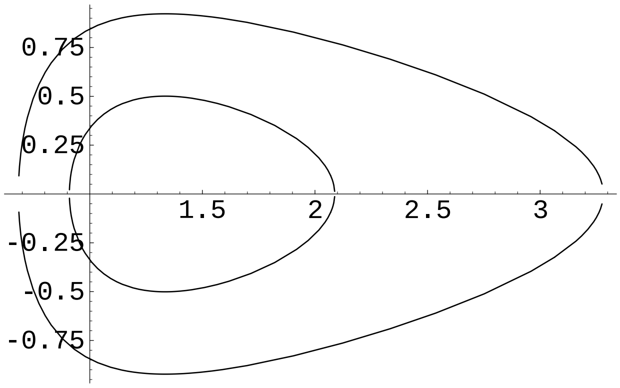

Figura 11. Piano delle fasi per $\alpha > 0$.