Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato II - Livia Corsi (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Cominciamo col risolvere l'equazione omogenea associata. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda + 29,$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = 2 + 5i, \qquad \lambda_2 = 2 - 5i.$$

La soluzione generale dell'omogenea è quindi

$$x_0(t) = e^{2t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t).$$

Cerchiamo la soluzione del problema di Cauchy con il metodo di variazione delle costanti. Cerchiamo quindi due funzioni $c_1(t), c_2(t)$ tali che

$$\overline{x}(t) = e^{2t}(c_1(t) \cos 5t + c_2(t) \sin 5t)$$

risolve il problema differenziale non omogeneo. Derivando tale espressione otteniamo

$$\dot{\overline{x}}(t) = e^{2t}(2(c_1(t) \cos 5t + c_2(t) \sin 5t) + \dot{c}_1(t) \cos 5t - 5c_1(t) \sin 5t + \dot{c}_2(t) \sin 5t + 5c_2(t) \cos 5t).$$

Poiché cerchiamo una soluzione particolare del problema, possiamo imporre (ad esempio)

$$\dot{c}_1(t) \cos 5t + \dot{c}_2(t) \sin 5t = 0,$$

in modo tale che risulti

$$\dot{\overline{x}}(t) = e^{2t}((2c_1(t) + 5c_2(t)) \cos 5t + (2c_2(t) - 5c_1(t)) \sin 5t).$$

Derivando una seconda volta otteniamo

$$\ddot{\overline{x}}(t) = e^{2t}((2\dot{c}_1(t) + 5\dot{c}_2(t) - 21c_1(t) + 20c_2(t)) \cos 5t + (2\dot{c}_2(t) - 5\dot{c}_1(t) - 20c_1(t) - 21c_2(t)) \sin 5t).$$

Sostituendo $\overline{x}$ nell'equazione non omogenea troviamo

$$e^{2t}((2\dot{c}_1(t) + 5\dot{c}_2(t)) \cos 5t + (2\dot{c}_2(t) - 5\dot{c}_1(t) \sin 5t)) = 1.$$

Per la condizione imposta, possiamo sostituire

$$\dot{c}_1(t) = -\dot{c}_2(t)\mathrm{tg}5t$$

e quindi troviamo

$$\dot{c}_2(t) = \frac{1}{5} e^{-2t} \cos 5t.$$

Integrando ambo i membri troviamo

$$c_2(t) = \frac{1}{145} e^{-2t}(5 \sin 5t - 2 \cos 5t) + \overline{c}$$

e possiamo porre $\overline{c} = 0$ dato che cercavamo una soluzione particolare. Ma allora

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} \sin 5t$$

e quindi, integrando ambo i membri

$$c_1(t) = \frac{1}{145} e^{-2t}(5\cos 5t + 2\sin 5t) + \widetilde{c}$$

e di nuovo possiamo porre $\widetilde{c} = 0$. Pertanto la soluzione generale del problema differenziale non omogeneo è

$$x(t) = \frac{1}{29} + e^{2t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t).$$

Imponendo il dato iniziale, allora, avremo

$$\begin{cases} x(0) = \dfrac{1}{29} + c_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = 2\left(\dfrac{1}{29} + c_1\right) + 5\left(c_2 - \dfrac{2}{145}\right) \end{cases}$$

e quindi

$$c_1 = -\frac{1}{29}, \qquad c_2 = \frac{2}{145}.$$

Sostituendo tali valori nell'espressione di $x(t)$ otteniamo la soluzione del problema di Cauchy, ovvero

$$x(t) = \frac{1}{29} + e^{2t}\left(-\frac{1}{29}\cos 5t + \frac{2}{145}\sin 5t\right).$$

<u>Esercizio 2.</u> Osserviamo che A si scrive facilmente come somma di una matrice diagonale e una nilpotente, ovvero

$$A = S + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ma si vede che $[S, N] \neq 0$ e quindi questa decomposizione non permette di risolvere il problema del calcolo dell'esponenziale di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

quindi $\Sigma(A) = \{2, -1\}$. Ora $E^*(2) = \mathrm{Ker}(A - 2\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

e quindi $E^*(2) = \{(s, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ s \in \mathbb{R}\}$. Invece $E^*(-1) = \mathrm{Ker}(A + \mathbb{1})$ è dato da

$$\{\, 3x + 2y = 0$$

e dunque $E^*(-1) = \{(2s, -3s) \in \mathbb{R}^2 \ : \ s \in \mathbb{R}\}$. Avremo quindi

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che $A = Q^{-1}\widetilde{S}Q$ e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 2(e^{2t} - e^{-t})/3 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione è quindi data da

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 2(e^{2t}-e^{-t})/3 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \exp(-As)B(s) \right] \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 2(e^{2t}-e^{-t})/3 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \begin{pmatrix} e^{-2s} & 2(e^{-2s}-e^{s})/3 \\ 0 & e^{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s} \\ e^{s} \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 2(e^{2t}-e^{-t})/3 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{d}s \begin{pmatrix} (5e^{-s}-2e^{2s})/3 \\ e^{2s} \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 2(e^{2t}-e^{-t})/3 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(5e^{-t}+e^{2t})/3 \\ e^{2t}/2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 2(e^{2t}-e^{-t})/3 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+(6-5e^{-t}-e^{2t})/3 \\ 2+(e^{2t}-1)/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4e^{2t}-e^{-t}-2e^{t} \\ \cosh t + e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>Esercizio 3.</u> Il polinomio caratteristico dell'equazione è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 4$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2-16}}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2-16}}{2}.$$

caso 1. $|\alpha| > 4$. In questo caso la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

e sostituendo le condizioni al bordo troviamo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ x(\pi) = c_1 e^{\lambda_1 \pi} + c_2 e^{\lambda_2 \pi} = 0 \end{cases}$$

e questo è possibile se e solo se $c_1 = c_2 = 0$, quindi l'unica soluzione è la soluzione identicamente nulla.

caso 2. $|\alpha| = 4$. In questo caso la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-\alpha t/2} + c_2 t e^{-\alpha t/2}$$

e imponendo le condizioni al bordo troviamo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(\pi) = c_1 e^{-\alpha\pi/2} + c_2 \pi e^{-\alpha\pi/2} \end{cases}$$

e di nuovo otteniamo $c_1 = c_2 = 0$ ovvero la soluzione identicamente nulla.

caso 3. $|\alpha| < 4$. In questo caso scriviamo gli autovalori nella forma

$$\lambda_\pm = a \pm ib, \qquad a = -\frac{\alpha}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{16-\alpha^2}}{2}$$

quindi la soluzione generale sarà

$$x(t) = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$$

Imponendo le condizioni al bordo avremo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(\pi) = e^{a\pi}(c_1 \cos b\pi + c_2 \sin b\pi) \end{cases}$$

e quindi avremo una soluzione non identicamente nulla per $b = k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, ovvero per

$$|\alpha| < 4, \qquad \sqrt{16 - \alpha^2} = k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ossia

$$\alpha \in \{\pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{12}, \pm\sqrt{15}\}$$

e in tal caso la soluzione sarà

$$x(t) = ce^{-\alpha t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{16 - \alpha^2}}{2} t\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

<u>Esercizio 4.</u> Cominciamo considerando il caso semplice in cui $\varepsilon = 0$. In questo caso infatti avremo

$$\begin{cases} \ddot{x} = x \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

e considerata la sostituzione $\dot{x} = y$ troviamo quindi il sistema lineare

$$\dot{\xi} = A\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $\xi(0) = (1, 0)$. Il polinomio caratteristico di A è dato iniziale

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - 1$$

e quindi $\Sigma(A) = \{1, -1\}$. Gli autospazi sono quindi

$$E^*(1) = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$
$$E^*(-1) = \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

perciò

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che $A = Q^{-1}\widetilde{S}Q$ e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\widetilde{S}Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy, che è data dalla prima riga del vettore $\xi(t)$ è

$$x(t) = \cosh t$$

Vediamo quindi il caso $\varepsilon > 0$. Di nuovo considerando la sostituzione $\dot{x} = y$ il sistema lineare non omogeneo

$$\dot{\xi} = A\xi + B(t), \qquad \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon e^{2t} \end{pmatrix}$$

In questo caso il polinomio caratteristico del sistema omogeneo associato è

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda - 1$$

quindi $\Sigma(A) = \{-\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2, -\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2\}$ che sono reali e distinti indipendentemente dal valore assunto da ε; calcoliamo quindi gli autospazi. $E^*(-\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2)$ è dato da

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}\right) x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \left(-\dfrac{3\varepsilon}{2} - \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}\right) x_2 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$E^*(-\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2) = \left\{ \left(t, -\frac{\varepsilon}{2}t + \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}t\right) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

e analogamente

$$E^*(-\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2) = \left\{ \left(t, -\frac{\varepsilon}{2}t - \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4}}{2}t\right) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Avremo quindi

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} -\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 & -\varepsilon/2 - \sqrt{\varepsilon^2+4}/2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \end{pmatrix}$$

e si vede che $A = Q^{-1}\widetilde{(S)}Q$ e quindi

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}\left(\varepsilon e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t} - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+4}\left(1+e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}\right)\right)}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} & \frac{e^{-(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2} - e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} \\ \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}\left(e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}-1\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+4}} & \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4})t/2}\left(\varepsilon - \varepsilon e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t} + \sqrt{\varepsilon^2+4}\left(1+e^{\sqrt{\varepsilon^2+4}t}\right)\right)}{2\sqrt{\varepsilon^2+4}} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\xi(t) = \exp(At)\left(\xi_0 + \int_0^t \mathrm{d}s \exp(-As)B(s)\right)$$

da cui troviamo che la soluzione del problema di Cauchy corrisponde alla prima riga del vettore $\xi(t)$, ovvero

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{4+\varepsilon^2})t/2}}{2(3+2\varepsilon)\sqrt{4+\varepsilon^2}} \left(e^2\left(-1 + e^{\sqrt{4+\varepsilon^2}t}\right) + 3\sqrt{4+\varepsilon^2}\left(1 + e^{\sqrt{4+\varepsilon^2}t}\right)\right) \\ & \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{4+\varepsilon^2})t/2}}{2(3+2\varepsilon)\sqrt{4+\varepsilon^2}} \left(\varepsilon\left(1 + \sqrt{4+\varepsilon^2} + \left(-1+\sqrt{4+\varepsilon^2}\right)e^{\sqrt{4+\varepsilon^2}t} + 2\sqrt{4+\varepsilon^2}e^{(4+\varepsilon+\sqrt{4+\varepsilon^2})t/2}\right)\right) \end{aligned}$$

<u>Esercizio 5.</u> Il sistema è del tipo

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B(t) \\ z(0) = (1,0) \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix}$$

Consideriamo intanto il sistema omogeneo associato i.e.

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(0) = (1,0) \end{cases}$$

e osserviamo immediatamente che A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

quindi possiamo calcolare immediatamente il suo esponenziale ottenendo

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Inoltre riconosciamo in $\exp(At)$ una matrice di rotazione e quindi la sua inversa è

$$[\exp(At)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema non-omogeneo sarà quindi

$$z(t) = \exp(At)\,[c(t) + z(0)]$$

con $c(t)$ tale che

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= [\exp(At)]^{-1}\,B(t) = \exp(-At)B(t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t \\ -5\sin^2 t\cos t + 3\cos^3 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} c_1(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s(5\sin s\cos^2 s - 3\sin^3 s) \\ c_2(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s(-5\sin^2 s\cos s + 3\cos^3 s) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1(t) = \cos t - \dfrac{2}{3}\cos 3t - \dfrac{1}{3} \\ c_2(t) = \sin t + \dfrac{2}{3}\sin 3t \end{cases}$$

Quindi la soluzione del sistema è

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(At)\,[c(t) + z(0)] \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t - \frac{2}{3}\cos 3t - \frac{2}{3} \\ \sin t + \frac{2}{3}\sin 3t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2\cos t + \cos 2t)/3 \\ 2\sin t(1 + 5\cos t)/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = (2\cos t + \cos 2t)/3 \\ y(t) = 2\sin t(1 + 5\cos t)/3 \end{cases}$$

<u>Esercizio 6.</u> Si tratta di una semplice generalizzazione di quanto descritto nel file *http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2008/FM1/tutorato/var_ const.pdf*