Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
Tutorato II - Livia Corsi (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Scrivendo
$$\dot{x} - 2t = x - t^2,$$
notiamo che il termine a sinistra dell'equazione coincide con la derivata del termine a destra, ossia
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - t^2) = x - t^2,$$
e quindi, considerata la sostituzione $y(t) = x(t) - t^2$, dato che $y(0) = x(0) = x_0$, possiamo riscrivere il problema nella forma
$$\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$
La soluzione di tale problema è data da
$$y(t) = x_0 e^t$$
e quindi la soluzione del problema iniziale sarà
$$x(t) = x_0 e^t + t^2.$$

Esercizio 2. Posto $y = \dot{x}$, riscriviamo il problema nella forma
$$\begin{cases} \dot{y} - te^t y^{-2} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
Risolvendo per separazione di variabili troviamo
$$\int_1^{y(t)} \mathrm{d}\xi\, \xi^2 = \int_0^t \mathrm{d}s\, s\, e^s$$
ovvero
$$\frac{1}{3} y^3(t) = \frac{1}{3} + te^t - e^t + 1,$$
e quindi
$$y(t) = \sqrt[3]{3(t-1)e^t + 4}.$$
La soluzione del problema iniziale sarà quindi data da
$$\int_1^{x(t)} \mathrm{d}\xi = \int_0^t \mathrm{d}s\, y(s)$$
ovvero
$$x(t) = 1 + \int_0^t \mathrm{d}s\, \sqrt[3]{3(t-1)e^t + 4}.$$

Esercizio 3. Posto $y = tx$ abbiamo $y(1) = x(1) = 1$ e
$$\dot{y} = t\dot{x} + x = t\frac{\sin t - t^2x^3 - x + 1}{t^3x^2 + t} + x = \frac{\sin t + 1}{y^2 + 1},$$

Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_1^{y(t)} \mathrm{d}\xi(\xi^2+1) = \int_1^t \mathrm{d}s(\sin s + 1),$$

ossia

$$\frac{1}{3}y^3(t) + y(t) = t - \cos t - \cos 1 + \frac{7}{3},$$

Pertanto la soluzione del problema iniziale sarà $x(t) = y/t$ con $y(t)$ definita implicitamente dall'equazione polinomiale

$$\frac{1}{3}y^3(t) + y(t) - t + \cos t + \cos 1 - \frac{7}{3} = 0.$$

<u>Esercizio 4.</u> Posto $y = x - 2t$, dato che $y(0) = x(0) = \alpha$, avremo

$$\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Caso 1. Se $\alpha = 0$ troviamo la soluzione identicamente nulla $y(t) \equiv 0$ e quindi la soluzione del problema iniziale è $x(t) = 2t$ che risulta definita per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$.
Caso 2. Se $\alpha \neq 0$ allora risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2} = \int_0^t \mathrm{d}s$$

e quindi

$$y(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha t}.$$

Ma allora si ha

$$x(t) = 2t + \frac{\alpha}{1-\alpha t}$$

che è definita per $t \in (-\infty, 1/\alpha)$ se $\alpha > 0$ e in $(1/\alpha, +infty)$ se $\alpha < 0$.

<u>Esercizio 5.</u> Posto $y = 2x/t$ e visto che $y(1) = 2x(1) = 0$, avremo

$$\begin{cases} \dot{y} = e^y \cos \ln t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

e risolvendo per separazione di variabili otteniamo

$$y(t) = -\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t(\cos\ln t + \sin\ln t)\right),$$

pertanto la soluzione del problema iniziale è

$$x(t) = -\frac{1}{2}t\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t(\cos\ln t + \sin\ln t)\right).$$

<u>Esercizio 6.</u> Posto $y(t) = t + x(t)$ si ha $y(0) = x(0) = 0$ e quindi cerchiamo soluzioni del problema

$$\begin{cases} \dot{y} = (y-1)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo per separazione di variabili avremo

$$\int_0^{y(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-1)^2} = \int_0^t \mathrm{d}s$$

e quindi

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t+1}.$$

Allora la soluzione del problema iniziale sarà

$$x(t) = 1 - \frac{1}{t+1} - t.$$

Scegliendo un dato iniziale generico $x_0 \neq 1$ la soluzione avrà la stessa forma ma sarà definita su un diverso intervallo temporale. Scegliendo invece come dato iniziale $x_0 = 1$ troveremo per la variabile y la soluzione identicamente costante $y(t) \equiv 1$, e quindi la soluzione del problema iniziale sarà $x(t) = 1 - t$.