Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato IV - Livia Corsi (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1.

(1.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x, y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo quindi

$$H(x, y) = \int \mathrm{d}y\, 2y = y^2 + f(x)$$

con $f(x)$ da determinare. Derivando rispetto a x otteniamo

$$\frac{\partial H}{\partial x} = f'(x)$$

e quindi avremo $f'(x) = -\dot{y}$ cioè, integrando,

$$f(x) = -\int \mathrm{d}x\, 8x(x^2-1)^3 = -(x^2-1)^4 + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Perciò una costante del moto è

$$H(x, y) = y^2 - (x^2-1)^4$$

avendo imposto $c = 0$.

(1.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 8x(x+1)^3(x-1)^3 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo $y = 0$ mentre dalla seconda troviamo $x = 0$, $x = \pm 1$, perciò i punti d'equilibrio del sistema saranno

$$P_0 = (0, 0) \qquad P_1 = (1, 0) \qquad P_2 = (-1, 0)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8(x^2-1)^2(7x^2-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo quindi cosa accade intorno ai punti d'equilibrio.

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico à $P(\lambda) = \lambda^2 + 16$; gli autovalori della matrice $A(0, 0)$ hanno quindi parte reale nulla e dunque non possiamo ancora dire niente sulla stabilità di P_0.

$$A(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2$ e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla e quindi non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_1. Analogamente

$$A(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e di nuovo non possiamo decidere la stabilità di P_2.

Vediamo quindi se è possibile determinare una funzione di Ljapunov che ci permetta di decidere la stabilità dei punti d'equilibrio.

Per quanto riguarda P_0, osserivamo che la matrice hessiana di H, calcolata in P_0 è in forma diagonale con autovalori positivi; quindi posto $W(x,y) = H(x,y) - H(0,0)$ avremo che W è una funzione di Ljapunov per P_0 che quindi risulta essere stabile via il teorema di Ljapunov. Viceversa per quanto riguarda i punti $P_{1,2}$ vediamo che la matrice hessiana di H calcolata in tali punti è

$$\mathcal{H}(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Poiché tale matrice ha determinante nullo, non possiamo decidere la stabilità dei punti P_i utilizzando una funzione W che sia un'opportuna modifica di H. Tenteremo quindi un approccio grafico per determinare la stabilità di tali punti.

(1.3) **Curve di livello.** Cominciamo studiando la curva

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 - (x^2-1)^4 = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

dove le curve $\mathcal{C}_i$ sono

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = (x^2-1)^2\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -(x^2-1)^2\}$$

perciò avremo 8 possibili traiettorie di cui 2 punti instabili e 6 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

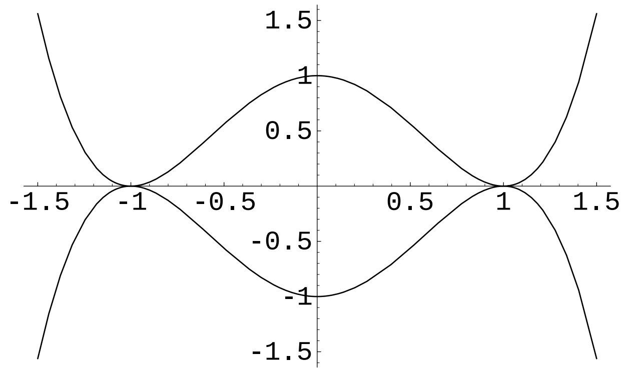

Figura 1: Grafico della curva di livello Γ_0

Per dipendenza continua dal dato iniziale troviamo quindi le altre curve di livello

Versi di percorrenza. Analizziamo i versi di percorrenza a partire dalla curva Γ_0. Su $\mathcal{C}_1$, poiché $y = (x^2-1)^2$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x^2-1)^2 \\ \dot{y} = 8x(x^2-1)^3 \end{cases}$$

da cui si vede immediatamente che $\dot{x} > 0 \ \forall x \neq \pm 1$. Su $\mathcal{C}_2$, poichè $y = -(x^2-1)^2$, avremo invece

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x^2-1)^2 \\ \dot{y} = 8x(x^2-1)^3 \end{cases}$$

e quindi $\dot{x} < 0$ per ogni $x \neq \pm 1$. Dallo studio dei versi di percorrenze su Γ_0 possiamo dire, inoltre, che i punti d'equilibrio $P_{1,2}$ sono instabili perché (per ciascuno di essi) esistono due traiettorie che si allontanano. Possiamo ottenere le velocità sulle altre curve di livello per dipendenza differenziabile dai dati iniziali.

(1.4) **Traiettorie periodiche.** Sappiamo che se esiste una regione U che sia racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di H e contenga un unico punto d'equilibrio z_0 che sia stabile, allora ogni traiettoria $\varphi(t, \overline{x})$, con $\overline{x} \in U \setminus \{z_0\}$ è periodica, e si svolge su un orbita

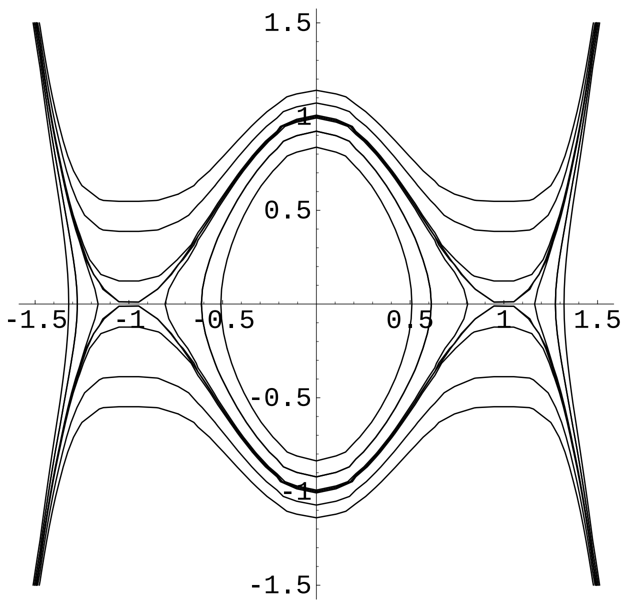

Figura 2: Piano delle fasi per il sistema

che contiene z_0 al suo interno[1]. Quindi, i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono nell'aperto

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, \ \ -(x^2-1)^2 < y < (x^2-1)^2\} \backslash \{P_3\}$$

(1.5) **Soluzione esplicita.** Osserviamo immediatamente che il dato iniziale si trova sulla curva di livello $\mathcal{C}_1$ dove vale $y = (x^2-1)^2$. Cominciamo quindi risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x^2-1)^2 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Separando le variabili, otteniamo

$$2 = \frac{\dot{x}}{(x^2-1)^2}$$

quindi, integrando ambo i membri

$$\begin{aligned} 2t &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2-1)^2} \\ &= -\frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{1}{4} \ln \frac{|1+x|}{|x-1|} \end{aligned}$$

Perciò la soluzione esplicita è $x(t)$ tale che

$$-\frac{x}{(x^2-19} + \frac{1}{2} \ln \frac{|1+x|}{|x-1|} = t.$$

e sostituendo $y(t) = (x^2(t)-1)^2$ troviamo la componente y della curva.

<u>ESERCIZIO 2.</u>
(2.1) **Punti d'equilibrio.** Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2x - y^2 = 0 \\ -y - x^2 = 0 \end{cases}$$

trovando quindi i due punti $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{4})$.

[1] cfr. Teorema 20.36 sulle dispense del corso.

Stabilità. Cominciamo con lo studio del sistema linearizzato, che è dato dalla matrice

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2y \\ -2x & -1 \end{pmatrix}$$

e vediamo cosa succede intorno ai punti d'equilibrio.

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori reali strettamente negativi e quindi P_0 è un punto asintoticamente stabile.

$$A\left(-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{4}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt[3]{4} \\ 2\sqrt[3]{2} & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 2$ e quindi le sue radici sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

e quindi esiste una radice reale strettamente positiva; perciò P_1 è un punto instabile.
(2.2) **Bacino d'attrazione.** Definiamo la funzione

$$W(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

e osserviamo che W è una funzione di Ljapunov per P_0; infatti $W(P_0) = 0$ e chiaramente $W(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{P_0\}$. Inoltre

$$\dot{W}(x,y) = -2x^2 - y^2 - xy^2 - x^2y = -x^2(y+2) - y^2(x+1)$$

e quindi $\dot{W}(0,0) = 0$ mentre $\dot{W} < 0$ se $x > -1$ e $y > -2$. Pertanto abbiamo che $\dot{W} < 0$ su $B_1(0)\backslash\{0\}$ perciò, per il teorema di Ljapunov, $B_1(0)$ è contenuto nel bacino d'attrazione di P_0.

<u>Esercizio 3.</u>
(3.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x,y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo quindi

$$H(x,y) = \int \mathrm{d}y \left(2xy - x^4 + x^2\right) = xy^2 - x^4y + x^2y + f(x)$$

con $f(x)$ da determinare. Derivando rispetto a x otteniamo

$$-\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} = y^2 - 4x^3y + 2xy + f'(x)$$

e quindi avremo $f'(x) = 0$ cioè $f(x)$ è una costante arbitraria che, per comodità imponiamo nulla. Perciò una costante del moto è

$$H(x,y) = xy^2 - x^4y + x^2y$$

(3.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x(2y - x^3 + x) = 0 \\ y(4x^3 - y - 2x) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo $y = 0$ e $y = 4x^3 - 2x$. Sostituendo $y = 0$ nella prima, troviamo $x^2(1-x^2) = 0$ e quindi $x = 0$, $x = \pm 1$. Sostituendo invece $y = 4x^3 - 2x$, avremo $x^2(7x^2 - 3)$ cioè $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ e quindi, rispettivamente, $y = 0$, $y = -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $y = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema saranno

$$P_0 = (0,0) \qquad P_1 = (1,0) \qquad P_2 = (-1,0) \qquad P_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{7}}, -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) \qquad P_4 = \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}, \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

Stabilità dei punti d'equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - 4x^3 + 2x & 2x \\ 12x^2y - 2y & 4x^3 - 2y - 2x \end{pmatrix}$$

Vediamo quindi cosa accade vicino ai punti d'equilibrio. $A(0,0) = (0)_{i,j}$ che è già in forma diagonale con autovalori nulli, e quindi non si può dire nulla a proposito della stabilità di P_0 studiando il sistema linearizzato.

$$A(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$ e quindi gli autovalori sono $\lambda = \pm 4$. Perciò concludiamo che P_1 è un punto d'equilibrio instabile.

$$A(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi anche P_2, con le stesse argomentazioni di prima, risulta essere instabile.

$$A\left(\sqrt{\frac{3}{3}}, -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & 2\sqrt{\frac{3}{7}} \\ -\frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{36}{49}$ e quindi gli autovalori hanno entrambi parte reale nulla. Perciò non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_3. Analogamente

$$A\left(-\sqrt{\frac{3}{3}}, \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & -2\sqrt{\frac{3}{7}} \\ \frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è di nuovo $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{36}{49}$, perciò non possiamo dire nulla sulla stabilità di P_4. Dobbiamo studiare, quindi, la stabilità di P_0, P_4 e P_4. Per quanto riguarda P_0, osserivamo che la matrice hessiana di H, calcolata in P_0 è la matrice nulla. Quindi non possiamo trovare una fonzione di Ljapunov per P_0 a partire da H, perciò lo sudio della stabilità di P_0 è rimandato. Riguardo a P_3, invece, avemo che

$$\mathcal{H}\left(\sqrt{\frac{3}{3}}, -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \\ -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & 2\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

e, poiché $det(\mathcal{H}) > 0$ e $\mathcal{H}_{1,1} > 0$, allora P_3 è un punto di minimo isolato per H. Definita quindi la funzione

$$W(x,y) = H(x,y) - H(P_3)$$

si osserva immediatamente che $W(x,y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_3 che quindi è un punto d'equilibrio stabile. Analogamente avremo che

$$\mathcal{H}\left(-\sqrt{\frac{3}{3}}, \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{44}{49}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} \\ \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & -2\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

e, poiché $det(\mathcal{H}) > 0$ e $\mathcal{H}_{1,1} < 0$, allora P_4 è un punto di massimo isolato per H. Definita quindi la funzione

$$W(x,y) = H(x,y) - H(P_4)$$

si osserva immediatamente che $W(x,y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ljapunov per P_4 che quindi è un punto d'equilibrio stabile. Studieremo la stabilità di P_0 solo dopo aver tracciato un grafico qualitativo nel piano delle fasi e determinato i versi di percorrenza lungo le traiettorie.
(3.3) **Curve di livello.** Cominciamo con il calcolare il valore di H nei punti instabili. Osserviamo che $H(P_i) = 0 \ \forall\, i = 1, 2$ ossia $H = 0$ nei punti instabili. Studiamo quindi la curva

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy(y - x^3 + x) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

dove le curve $\mathcal{C}_i$ sono

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^3 - x\} \end{aligned}$$

perciò avremo 13 possibili traiettorie di cui 3 punti instabili e 10 traiettorie che tendono asintoticamente ai punti instabili nel futuro o nel passato.

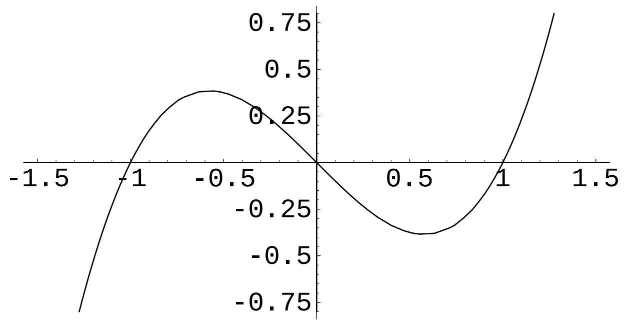

Figura 3: Grafico della curva di livello Γ_0

Versi di percorrenza. Analizziamo quindi i versi di percorrenza. Su $\mathcal{C}_1$, poiché $x \equiv 0$ avremo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y^2 \end{cases}$$

da cui si vede immediatamente che $\dot{y} < 0 \ \forall y \neq 0$. Su $\mathcal{C}_2$, poichè $y \equiv 0$, avremi invece

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(1 - x^2) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$. Infine, su $\mathcal{C}_3$, analizzando solo il verso di percorrenza nella direzione x per semplicità.

$$\dot{x} = x^2(x^2 - 1)$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per $x- < 1$ e $x > 1$. Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello per dipendenza continua dai dati iniziali.
(3.4) **Traiettorie periodiche.** Per gli stessi argomenti usati in (1.4) sappiamo che i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono negli aperti

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \ \ x^3 - x < y < 0\} \backslash \{P_3\} \\ U_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 0 \ \ 0 < y < x^3 - x\} \backslash \{P_4\} \end{aligned}$$

(3.5) **Soluzione esplicita.** Osserviamo immediatamente che il dato iniziale si trova sulla curva di livello $\mathcal{C}_2$ dove vale $\dot{y} = 0$. Pertanto si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - x^4 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Separando le variabili, otteniamo

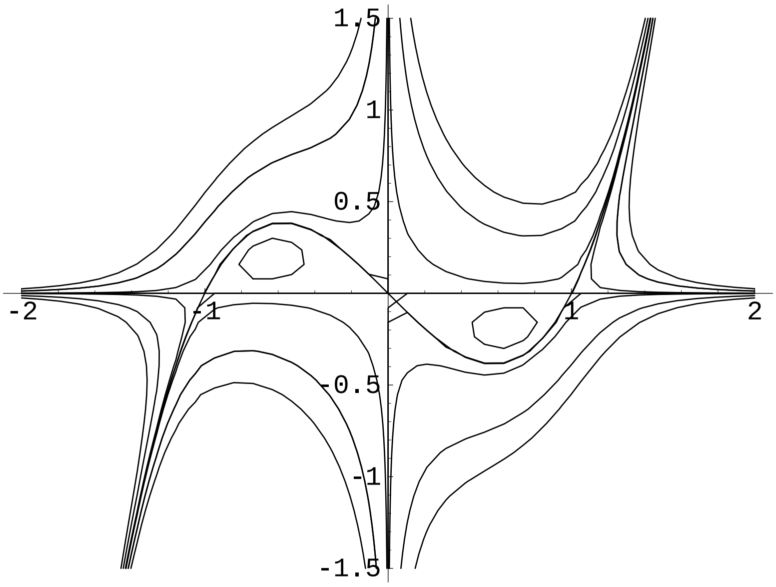

Figura 4: Piano delle fasi per il sistema

$$1 = \frac{\dot{x}}{x^2 - x^4}$$

quindi, integrando ambo i membri

$$\begin{aligned} t &= \int_2^x \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y^4} \\ &= \int_2^x \mathrm{d}y \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{2(1-y)} + \frac{1}{2(1+y)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1+x|}{3|x-1|} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Perciò la soluzione esplicita è $x(t)$ tale che

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1+x|}{3|x-1|} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = t$$