

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
TUTORATO V - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Innanzitutto vediamo che il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = 4y(2 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

(1.1) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema $\nabla V = 0$, ovvero a meno di fattori moltiplicativi non nulli

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) = 0 \\ y(x^2 + y^2 - 2) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo l'origine $(0, 0)$, che risolve anche la seconda, e la condizione $x = 0$ che sostituita nella seconda equazione da $y = 0$ o $y = \pm\sqrt{2}$. Pertanto i punti d'equilibrio del sistema gradiente saranno

$$P_0 = (0, 0), \quad P_+ = (0, \sqrt{2}), \quad P_- = (0, -\sqrt{2}).$$

Stabilità. La matrice del sistema linearizzato è, in ogni punto

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -4(3x^2 + y^2) & -8xy \\ -8xy & 4(2 - x^2 - 3y^2) \end{pmatrix}.$$

In particolare avremo quindi

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

e quindi P_0 è un punto d'equilibrio instabile del sistema dato che la matrice $A(P_0)$ ammette un autovalore (reale) strettamente positivo.

D'altra parte

$$A(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$$

e quindi, poiché entrambi gli autovalori sono (reali) strettamente negativi, i due punti saranno asintoticamente stabili.

(1.2) **Curve di livello.** Studiamo intanto le curve di livello di $V(z)$ a partire dall'altezza del punto instabile P_0 . Si vede facilmente che $V(P_0) = -2$ quindi scriviamo

$$\begin{aligned} V(x, y) + 2 &= x^4 - 2x^2 + 2(y^2 + 1)(x^2 - 1) + y^4 - 2y^2 + 2 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + (2y^2 + 2)(x^2 - 1) + y^4 - 2y^2 + 1 \\ &= (x^2 - 1)^2 + [(y^2 - 2y + 1) + (y^2 + 2y + 1)](x^2 - 1) + (y^2 - 1)^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 + [(y - 1)^2 + (y + 1)^2](x^2 - 1) + (y - 1)^2(y + 1)^2 \\ &= (x^2 - 1 + (y - 1)^2)(x^2 - 1 + (y + 1)^2), \end{aligned}$$

e studiamo la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1 + (y - 1)^2)(x^2 - 1 + (y + 1)^2) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2,$$

dove $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono le due circonferenze

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 = 1\} \end{aligned}$$

ovvero sono due circonferenze di raggio unitario e centro in $(0, 1)$ e $(0, -1)$ rispettivamente. Per continuità otteniamo le altre curve di livello. Sappiamo infine che nei punti regolari del sistema si ha che ∇V

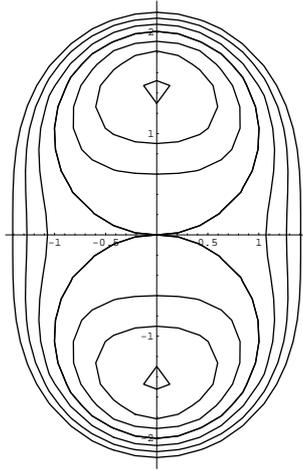


Figura 1: Curve di livello di $V(x, y)$.

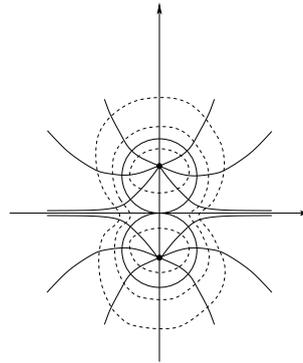


Figura 2: Piano delle fasi.

è ortogonale alle curve di livello di V . Perciò poiché le velocità sono uguali a $-\nabla V$ in ogni punto, le traiettorie saranno ortogonali alle curve di livello di ∇V e saranno dirette in senso opposto al gradiente.

(1.3) **Bacino d'attrazione.** Notiamo intanto che $V(0, \sqrt{2}) = V(0, -\sqrt{2}) = -4$. Per stimare il bacino d'attrazione consideriamo la funzione

$$W(x, y) = V(x, y) + 4 =$$

dato che si verifica facilmente che W è funzione di Ljapunov per P_{\pm} . Studiamo intanto il bacino d'attrazione di P_+ . Dal teorema di Barbašin-Krasovskij sappiamo che un qualunque compatto K chiusura di un aperto tale che $P_+ \in K$, positivamente invariante e non esistono traiettorie in $K \setminus \{P_+\}$ costituite unicamente dai punti z in cui $\dot{W}(z) = 0$ allora K è contenuto nel bacino d'attrazione di P_+ . Ma allora con W come funzione di Ljapunov, ogni compatto contenuto nel semipiano $\{y > 0\}$ soddisfa le ipotesi di Barbašin-Krasovskij quindi il bacino d'attrazione è tutto il semipiano $\{y > 0\}$. Analogamente si verifica che il bacino d'attrazione di P_- è tutto il semipiano $\{y < 0\}$.

ESERCIZIO 2.

(2.1) **Costante del moto.** Condizione sufficiente affinché una funzione $H(x, y)$ sia costante del moto è

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo quindi

$$H(x, y) = x \int dy (x^2 + 3y^2 - 4) = xy(x^2 + y^2 - 4) + f(x)$$

con $f(x)$ ancora da determinare. Derivando rispetto a x otteniamo

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y(3x^2 + y^2 - 4) + f'(x)$$

e quindi deve valere $f'(x) = 0$ ovvero $f(x) = c$ dove c è una costante arbitraria che per comodità imponiamo uguale a zero. Allora una costante del moto è

$$H(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 4)$$

(2.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x(x^2 + 3y^2 - 4) = 0 \\ y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo $x = 0$ e $x^2 = 4 - 3y^2$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione troviamo $y = 0$ e $y = \pm 2$. Sostituendo invece $x^2 = 4 - 3y^2$ troviamo $y = 0$ e quindi $x = \pm 2$, e $y = \pm 1$ e quindi $x = \pm 1$. Pertanto i punti d'equilibrio del sistema sono

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{\pm}^1 = (0, \pm 2) \quad P_{\pm}^2 = (\pm 2, 0) \\ P_{\pm}^3 = (1, \pm 1), \quad P_{\pm}^4 = (-1, \pm 1)$$

Stabilità. La matrice del sistema linearizzato è, in ogni punto,

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x^2 + y^2) - 4 & 6xy \\ -6xy & 4 - 3(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

quindi in particolare

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è già in forma diagonale con autovalori ± 4 quindi il punto è instabile. Per quanto riguarda P_{\pm}^1 e si ha

$$A(P_{\pm}^1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e di nuovo i due punti sono instabili. Allo stesso modo si vede che anche i punti P_{\pm}^2 sono instabili: infatti basta scambiare il ruolo di x e y . Per quanto riguarda invece i punti P_{\pm}^3 e P_{\pm}^4 avremo

$$A(P_{\pm}^3) = \begin{pmatrix} 2 & \pm 6 \\ \mp 6 & -2 \end{pmatrix}$$

mentre

$$A(P_{\pm}^4) = \begin{pmatrix} 2 & \mp 6 \\ \pm 6 & -2 \end{pmatrix}$$

e in entrambi i casi gli autovalori sono $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{2}$ quindi non possiamo dire nulla sulla stabilità di tali punti attraverso lo studio del sistema linearizzato. D'altra parte se calcoliamo la matrice hessiana della costante del moto troviamo

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3(x^2 + y^2) - 4 \\ 3(x^2 + y^2) - 4 & 6xy \end{pmatrix}$$

quindi in particolare

$$\mathcal{H}(P_{\pm}^3) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 2 \\ 2 & \pm 6 \end{pmatrix}$$

quindi P_{\pm}^3 è un punto di minimo mentre P_{\pm}^4 è un punto di massimo e quindi le funzioni $W_{1,\pm}(x, y) = \pm H(x, y) - H(P_{\pm}^3)$ sono funzioni di Ljapunov intorno ai punti P_{\pm}^3 che quindi sono stabili. Analogamente,

$$\mathcal{H}(P_{\pm}^4) = \begin{pmatrix} \mp 6 & 2 \\ 2 & \mp 6 \end{pmatrix}$$

e dunque P_{\pm}^4 è un punto di massimo mentre P_{\pm}^3 è un punto di minimo, e quindi le funzioni $W_{2,\pm}(x, y) = \mp H(x, y) - H(P_{\pm}^4)$ sono funzioni di Ljapunov intorno ai punti P_{\pm}^4 che quindi (di nuovo) sono stabili.

(2.3) Curve di livello. Notiamo intanto che $H(P_0) = H(P_{\pm}^1) = H(P_{\pm}^2) = 0$ quindi studiamo per prima la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy(x^2 + y^2 - 4) = 0\}$$

quindi avremo che $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ dove

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

Versi di percorrenza. Lungo \mathcal{C}_1 avremo che $\dot{x} = x(x^2 - 4)$ e quindi $\dot{x} > 0$ per $x > 2$ e $-2 < x < 0$ e negativo altrimenti. Viceversa lungo \mathcal{C}_2 si ha $\dot{y} = y(4 - y^2)$ e dunque $\dot{y} > 0$ per $0 < y < 2$ e $y < -2$ e negativo altrimenti. Lungo \mathcal{C}_3 infine avremo che se $x > 0$ allora $\dot{x} > 0$ se $y > \sqrt{2}$ mentre se $y < 0$

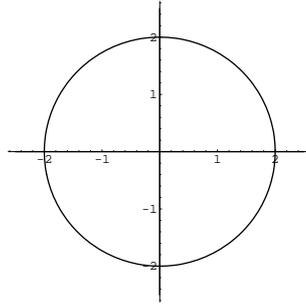


Figura 3: Grafico della curva di livello Γ_0

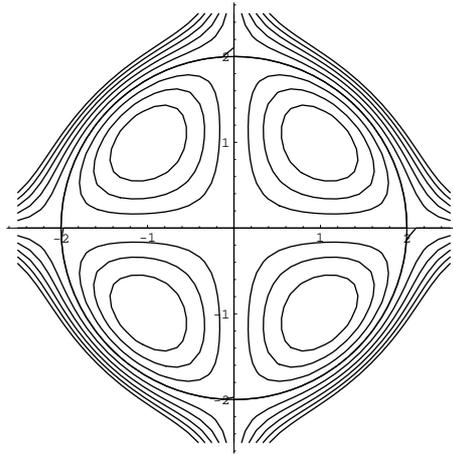


Figura 4: Piano delle fasi del sistema

allora $\dot{x} < 0$. Possiamo ottenere un grafico qualitativo delle altre curve di livello, con i rispettivi versi di percorrenza, per dipendenza continua e differenziabile dalle dato iniziale.

(2.4) **Traiettorie periodiche.** Sappiamo che se esiste una regione U che sia racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di H e contenga un unico punto d'equilibrio z_0 che sia stabile, allora ogni traiettoria $\varphi(t, \bar{z})$, con $\bar{z} \in U \setminus \{z_0\}$ è periodica e si svolge su un'orbita che contiene z_0 al suo interno¹. Quindi gli insiemi dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 4\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0, x^2 + y^2 < 4\}$$

$$^* U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0, x^2 + y^2 < 4\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0, x^2 + y^2 < 4\}$$

*

(2.5) **Sistema perturbato.** Il sistema è ora dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + 3y^2 - 4) - \alpha x \\ \dot{y} = y(4 - 3x^2 - y^2) - \alpha y \end{cases}$$

e la matrice del linearizzato, intorno all'origine, è quindi

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -4 - \alpha & 0 \\ 0 & 4 - \alpha \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm 4$ che sono entrambi strettamente negativi per $\alpha > \alpha_0 = 4$. Per stimare il bacino d'attrazione mostriamo che la funzione

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \|(x, y)\|^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

¹cfr. Teorema 20.36 sulle dispense del corso.

definita in \mathcal{U} soddisfa le tre condizioni del teorema di Ljapunov. Infatti è ovvio che $W(x, y) \geq 0$ e $W(x, y) = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Inoltre in $\mathcal{U} \setminus \{(0, 0)\}$ si ha

$$\begin{aligned}\dot{W} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x^2(x^2 + 3y^2 - 4 - \alpha) + y^2(4 - 3x^2 - y^2 - \alpha) \\ &= x^4 + 3x^2y^2 - 4x^2 - \alpha x^2 + 4y^2 - 3x^2y^2 - y^4 - \alpha y^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - 4(x^2 - y^2) - \alpha(x^2 + y^2) \\ &< -\alpha(x^2 + y^2) \\ &< -4\alpha \\ &< -16\end{aligned}$$

quindi \mathcal{U} è contenuto nel bacino d'attrazione dell'origine.

ESERCIZIO 3.

(3.1) **Costante del moto.** Affinché $H(\theta, y)$ sia costante del moto, deve valere $\dot{H} = 0$. Tenuto conto che la derivata totale di $H(\theta, y)$ è

$$\frac{d}{dt}H(\theta, y) = \langle \nabla H, (\dot{\theta}, \dot{y}) \rangle$$

e osservando che valgono

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial y} e^y \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} e^y \end{cases}$$

vediamo immediatamente che $\dot{H} = 0$.

(3.2) **Punti d'equilibrio.** Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} (2y - \sin \theta)e^y = 0 \\ ye^y \cos \theta = 0 \end{cases}$$

che, poiché $e^y \neq 0$ per ogni y , è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2y - \sin \theta = 0 \\ y \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione troviamo $y = 0$ e $\theta = \pm\pi/2$. Sostituendo nella prima equazione $y = 0$ troviamo $\theta = 0, \pi$, mentre sostituendo $\theta = \pm\pi/2$ troviamo rispettivamente $y = \pm 1/2$. Pertanto i punti d'equilibrio del sistema sono

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (\pi, 0), \quad P_{\pm} = (\pm\pi/2, \pm 1/2).$$

Stabilità. La matrice del sistema linearizzato è data, in ogni punto da

$$A(\theta, y) = \begin{pmatrix} -e^y \cos \theta & e^y(2 + 2y - \sin \theta) \\ -ye^y \sin \theta & e^y(y + 1) \cos \theta \end{pmatrix}$$

In particolare quindi si ha

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi P_0 è instabile. Analogamente

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pertanto anche P_1 è instabile. Infine

$$A(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{\pm 1/2} \\ -e^{\pm 1/2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e in entrambi i casi gli autovalori hanno parte reale nulla e quindi non possiamo dire ancora nulla sulla stabilità di P_{\pm} . D'altra parte, per quanto detto sopra, i punti d'equilibrio coincidono con i punti critici della costante del moto nonostante il sistema non sia della forma

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases}$$

e questo dipende dal fatto che il fattore e^y non si annulla mai. Ma allora possiamo sperare di dire qualcosa sulla stabilità dei punti P_{\pm} usando $H(\theta, y)$ (o più precisamente una sua opportuna modifica) come funzione di Ljapunov. Per fare ciò vediamo se i punti P_{\pm} sono dei punti di massimo o di minimo per la costante del moto. La matrice hessiana di $H(\theta, y)$ è

$$\mathcal{H}(\theta, y) = \begin{pmatrix} y \sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\mathcal{H}(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ossia entrambi sono punti di minimo per $H(\theta, y)$. Inoltre si vede che $H(P_+) = H(P_-) = -1/4$, pertanto la funzione $W(\theta, y) = H(\theta, y) + 1/4$ è funzione di Ljapunov per entrambi i punti P_{\pm} che quindi sono stabili.

(3.3) Curve di livello. Cominciamo studiando le curve di livello all'altezza dei punti instabili. Si verifica immediatamente che $H(P_0) = H(P_1) = 0$, pertanto studiamo la curva

$$\Gamma_0 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : y(y - \sin \theta) = 0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : y = 0\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : y = \sin \theta\} \end{aligned}$$

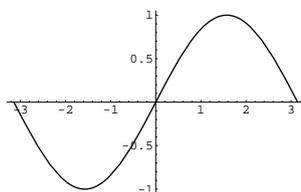


Figura 5: Grafico della curva di livello Γ_0

Le altre curve di livello si ottengono per dipendenza continua dal dato iniziale.

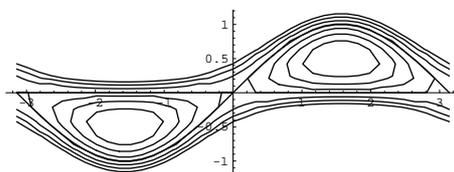


Figura 6: Piano delle fasi del sistema

Versi di percorrenza. Lungo \mathcal{C}_1 avremo che $\dot{\theta} = -\sin \theta$ e quindi $\dot{\theta} > 0$ per $-\pi < \theta < 0$ e negativo altrimenti. Viceversa lungo \mathcal{C}_2 si ha $\dot{\theta} = e^{\sin \theta} \sin \theta$ e dunque $\dot{\theta} > 0$ per $0 < \theta < \pi$ e negativo altrimenti. I versi di percorrenza sulle altre curve di livello si ottengono per dipendenza differenziabile dal dato iniziale.

(3.4) Per gli stessi argomenti usati in (2.4) sappiamo con certezza che i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche sono negli aperti

$$U_1 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : 0 < \theta < \pi, 0 < y < \sin \theta\} \setminus \{P_+\}$$

$$U_2 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : -\pi < \theta < 0, \sin \theta < y < 0\} \setminus \{P_-\}$$

Questo argomento non ci permette di dire nulla a proposito delle regioni

$$U_3 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : -\pi < \theta < \pi, y > \max\{0, \sin \theta\}\}$$

$$U_4 = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : -\pi < \theta < \pi, y < \min\{0, \sin \theta\}\}$$

dato che tali regioni sono illimitate. D'altra parte si può mostrare che anche in tali regioni ogni dato iniziale da origine a traiettorie periodiche, ragionando come segue.

Sia $(\theta_0, y_0) \in U_3$. Allora $H(\theta_0, y_0) = y_0^2 - y_0 \sin \theta_0 = c_0 > 0$ dato che in U_3 si ha $y > \max\{0, \sin \theta\}$, quindi la curva su cui si svolge il moto sarà

$$C = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : y^2 - y \sin \theta = c_0\}$$

ovvero, esplicitando la variabile y in funzione di θ ,

$$y = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 \theta + 4c_0}$$

dove abbiamo scelto la determinazione positiva data la condizione $y > \max\{0, \sin \theta\}$. Allora è evidente che

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} y(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow -\pi} y(\theta) = \sqrt{c_0}$$

e quindi la curva C definita sul cilindro $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ è chiusa e quindi è periodica. Si osservi che il ragionamento si ripete in maniera del tutto analoga per la regione U_4 .

(3.5) Scegliendo $(\theta_0, 0)$ come dato iniziale, la soluzione deve necessariamente rimanere sulla curva C_1 definita in (3.3). Pertanto sarà soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\sin \theta \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

Sappiamo già che se $\theta_0 = 0, \pi$ allora il dato iniziale coincide rispettivamente con i punti d'equilibrio instabile P_0, P_1 . Supponiamo quindi che $\theta_0 \neq 0, \pi$. Per quanto visto fin'ora ci aspettiamo che indipendentemente dalla scelta di $\theta_0 \in \mathbb{T} \setminus \{0, \pi\}$ la soluzione tenda ad avvicinarsi al punto P_0 in tempi infiniti (e quindi ad allontanarsi da π in tempi infiniti).

Altrimenti possiamo procedere mediante un calcolo esplicito. Risolvendo per separazione di variabili otteniamo

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dx}{\sin x} = -t$$

ossia

$$\theta(t) = 2 \operatorname{arctg} \left(e^{-t} \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right).$$

Pertanto si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = \pi$$

in accordo con quanto detto sopra.