Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato VI - Livia Corsi (02-04-2006)

CORREZIONE

Esercizio 1.

1.1. Stabilità asintotica dell'origine. Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -kx - \alpha y, \end{cases}$$

quindi l'origine $(0,0)$ è un punto d'equilibrio.

La matrice del sistema linearizzato in un intorno dell'origine è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\alpha \end{pmatrix},$$

così che l'equazione caratteristica è

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k}\right).$$

Poiché $|\alpha^2 - 4k| < \alpha^2$ entrambi gli autovalori sono strettamente negativi, quindi $(0,0)$ è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

1.2. Stima del bacino d'attrazione dell'origine. L'enunciato del teorema di Barbašin-Krasokvskij è il seguente.

Teorema. *Sia x_0 un punto d'equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe C^1. Supponiamo che esista una funzione $W\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita in un intorno $B(x_0)$ di x_0 e di classe C^1, tale che*
(1) $W(x_0) = 0$, e $W(x) > 0$ $\forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$;
(2) $\dot{W}(x) \leq 0$ $\forall x \in B(x_0)$.
(3) Supponiamo anche che esista un insieme compatto P tale che: (i) $x_0 \in P$, (ii) P è positivamente invariante, e (iii) non esistono in $P \setminus \{x_0\}$ traiettorie costituite unicamente da punti z in cui $\dot{W}(z) = 0$.
Allora x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e P è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

Nel nostro caso si può prendere

$$W(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),$$

e, come insieme P, la chiusura di qualsiasi intorno

$$B_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\right\}.$$

Si noti che $W(x,y) = R^2/2$ per ogni $(x,y) \in \partial B_R$.

Si verifica facimente che le ipotesi (1)-(3) del teorema sono soddisfatte. Infatti si ha $W(0,0) = 0$ e $W(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$, così che segue la (1). Inoltre $\dot{W}(x,y) = -\alpha y^2 \leq 0$, quindi anche la condizione (2) è soddisfatta. L'origine è contenuta in B_R, quindi vale la (3-i). Inoltre $\overline{B}_R$ è positivamante invariante: infatti il campo vettoriale in $(x,y) \in \partial B_R$ ha una componente $(y, -kx)$ tangente e una componente $(0, -\alpha y)$ diretta verticalmente, in modo tale che il vettore risultante è sempre o tangente alla curva ∂B_R (per $y = 0$) o diretto verso l'interno (per $y \neq 0$). Questo prova la (3-ii). Infine, poiché $\dot{W}(x,y) = 0$ solo per $y = 0$ e le traiettorie attraversano l'asse x ortogonalmente (i.e. il campo vettoriale in ogni punto $(x,0)$, $x \neq 0$, è diretto verticalmente, verso l'alto per $x < 0$ e verso il basso per $x > 0$), anche la (3-iii) è dimostrata. Data l'arbitrarietà di R possiamo concludere che il bacino d'attrazione dell'origine è tutto il piano.

Esercizio 2.

2.1. Costante del moto. Si cerca una funzione $H(x,y)$ tale che

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = x\left(1 + \alpha x^2\right), \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -y\left(1 + 3\alpha x^2\right).$$

Integrando la prima equazione rispetto a y otteniamo

$$H(x,y) = xy\left(1 + \alpha x^2\right) + c_1(x),$$

dove $c_1(x)$ è una funzione arbitraria di x, mentre integrando la seconda rispetto a x otteniamo

$$H(x,y) = xy\left(1 + \alpha x^2\right) + c_2(y),$$

dove $c_2(y)$ è una funzione arbitraria di y. Possiamo allora uguagliare le due espressioni ponendo $c_1(x) = c_2(y) = \text{cost.} = 0$, e ottenere

$$H(x,y) = xy\left(1 + \alpha x^2\right).$$

2.2. Punti d'equilibrio. Si ha $\dot{x} = 0$ per $x = 0$ oppure, se $\alpha < 0$, per $x = \pm x_0$, con $x_0 = \sqrt{-1/\alpha}$. Sostituendo nella seconda e imponendo $\dot{y} = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 & \Longrightarrow \quad y = 0, \\ x = \pm x_0 & \Longrightarrow \quad y = 0, \end{cases}$$

Quindi se $\alpha \geq 0$ abbiamo il solo punto d'equilibrio $P_0 = (0,0)$, mentre se $\alpha < 0$ abbiamo tre punti d'equilibrio: P_0, $P_1 = (x_0, 0)$ e $P_2 = (-x_0, 0)$.

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Sia $A(x,y)$ la matrice del sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio (x,y). Si ha allora

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + 3\alpha x^2 & 0 \\ -6\alpha xy & -1 - 3\alpha x^2 \end{pmatrix}.$$

Per $(x,y) = (0,0)$ si ottiene

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm 1$: quindi P_0 è un punto d'equilibrio instabile per ogni valore di α.

Se $\alpha < 0$ e $(x,y) = (\pm x_0, 0)$ si ottiene

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm 2$: quindi anche P_1 e P_2, quando esistono (i.e. per $\alpha < 0$), sono punti d'equilibrio instabile.

2.4. Analisi qualitativa. Distinguiamo i casi $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$.

Per $\alpha \geq 0$ la curva di livello

$$\Gamma_0 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = 0 \right\}$$

contenente il punto d'equilibrio instabile P_0 è data da

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2, \\ &\mathcal{C}_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}, \\ &\mathcal{C}_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\}, \end{aligned}$$

ed è quindi l'unione dei due assi $x = 0$ e $y = 0$. I versi di percorrenza su tali rette sono tali che

$$\begin{cases} x = 0 \implies \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -y \implies \dot{y} > 0 \text{ se e solo se } y < 0, \\ y = 0 \implies \dot{y} = 0, \quad \dot{x} = x(1 + \alpha x^2) \implies \dot{x} > 0 \text{ se e solo se } x > 0. \end{cases}$$

Per valori $c \neq 0$ le curve di livello si possono ottenere utilizzando la regolarità della funzione $H(x,y)$.

[Un'analisi più accurata è la seguente. Per $c \neq 0$ la curva di livello Γ_c è data da

$$\Gamma_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) = \frac{c}{x(1+\alpha x^2)}, \quad x \neq 0 \right\},$$

quindi per $c > 0$ si ha $y > 0$ per $x > 0$ e $y < 0$ per $x < 0$. Sempre per $c > 0$, si ha

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^\pm.$$

Inoltre

$$f'(x) = -\frac{c}{x^2(1+\alpha x^2)^2} \left(1 + 3\alpha x^2\right) < 0,$$

quindi f è decrescente, e

$$f''(x) = \frac{2c}{x^3(1+\alpha x^2)^3} \left(1 + 3\alpha x^2 + 6\alpha^2 x^4\right),$$

quindi f è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$.]

Il verso di percorrenza si ottiene per continuità (i.e. utilizzando la dipendenza continua dai dati iniziali) a partire dalle curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

Analogamente si può discutere il caso $c < 0$. Più asemplicemente si può utilizzare la simmetria $H(x,-y) = -H(x,y)$, per concludere che le curve di livello corrispondenti a valori negativi di c si ottengono da quelle corrispondenti a $-c$ per riflessione rispetto all'asse x.

La situazione è rappresentata in Figura 1. Si noti che per $\alpha = 0$ le curve di livello Γ_c, $c \neq 0$, si riducono a delle iperboli.

Per $\alpha < 0$ definiamo $\beta = -\alpha > 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4, \\
\mathcal{C}_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}, \\
\mathcal{C}_2 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\}, \\
\mathcal{C}_3 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0 \right\}, \\
\mathcal{C}_4 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x_0 \right\},
\end{aligned}$$

quindi Γ_0 è l'unione di quattro rette.

Per determinare i versi di percorrenza si può notare innanzitutto che sulle curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ si ha

$$x \in \{0, \pm x_0\} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -y \quad \Longrightarrow \qquad \dot{y} > 0 \text{ se e solo se } y < 0,$$

come per $x = 0$ nel caso precedente. Invece sulla retta $\mathcal{C}_2$, dove $y = 0$ si ha $\dot{x} > 0$ se e solo se $x > 0, x < x_0$ oppure $x < 0, x < -x_0$, quindi

$$\dot{x} > 0 \text{ se e solo se } 0 < x < x_0 \text{ oppure } x < -x_0.$$

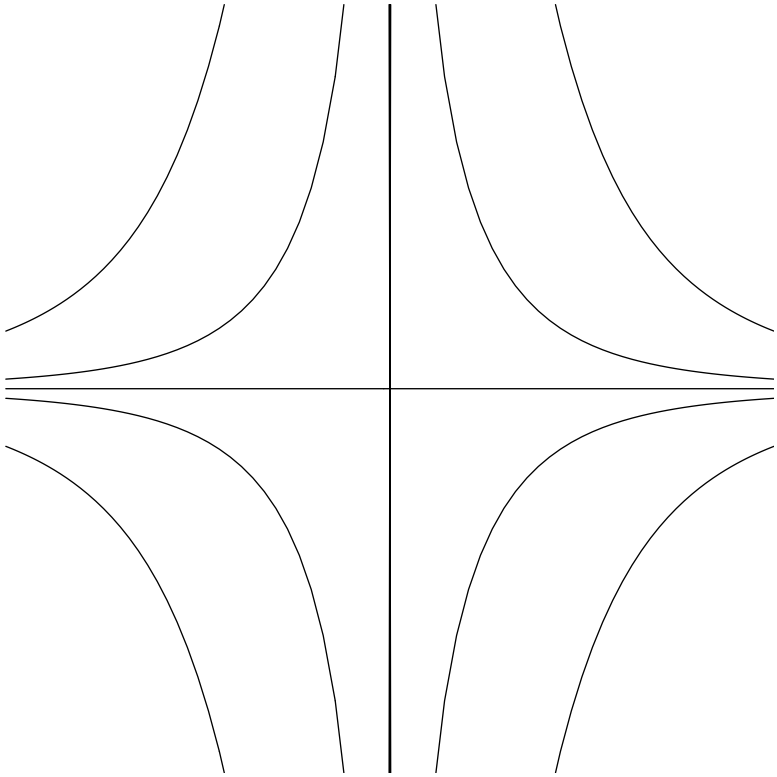

Figura 1. Curve di livello di $H(x,y)$ per $\alpha \geq 0$.

Per altri valori di c, di nuovo, si può utilizzare la continuità della funzione $H(x,y)$.

[Altrimenti, per avere un'analisi più commpleta, si può ragionare come segue. Per $c \neq 0$ si ha

$$\Gamma_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) = \frac{c}{x(1-\beta x^2)}, \quad x \neq 0 \right\},$$

quindi per $c > 0$ si ha $y > 0$ per $0 < x < x_0$ e $x < -x_0$ e $y < 0$ per $x > x_0$ e per $-x_0 < x < 0$.

Sempre per $c > 0$, si ha

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^{\pm},$$
$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to -x_0^{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) = -\frac{c}{x^2(1-\beta x^2)^2}\left(1 - 3\beta x^2\right),$$

quindi f è decrescente per $0 < x < x_0/\sqrt{3}$ ed è crescente per $x > x_0/\sqrt{3}$ (i.e. per $x_0/\sqrt{3} < x < x_0$ e per $x > x_0$) e per $x < -x_0$. SI può anche studiare la concavità di f studiando la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2c}{x^3(1-\beta x^2)^3}\left(1 - 3\beta x^2 + 6\beta^2 x^4\right),$$

o più semplicemente basta notare che $f''(x) \neq 0$ per x tale che $f'(x) = 0$, per concludere che la funzione $f(x)$ è o strettamente convessa o strettamente concava, e la concavità si ottiene per compatibilità con il fatto che la funzione è crescente o decrescente.]

Di nuovo i versi di percorrenza si determinano per continuità a partire da quelli sulla curva di livello Γ_0.

Analogamente – o sfruttando di nuovo il fatto che $H(x, y)$ è dispari in y – si discute il caso $c < 0$. La situazione è rappresentata in Figura 2.

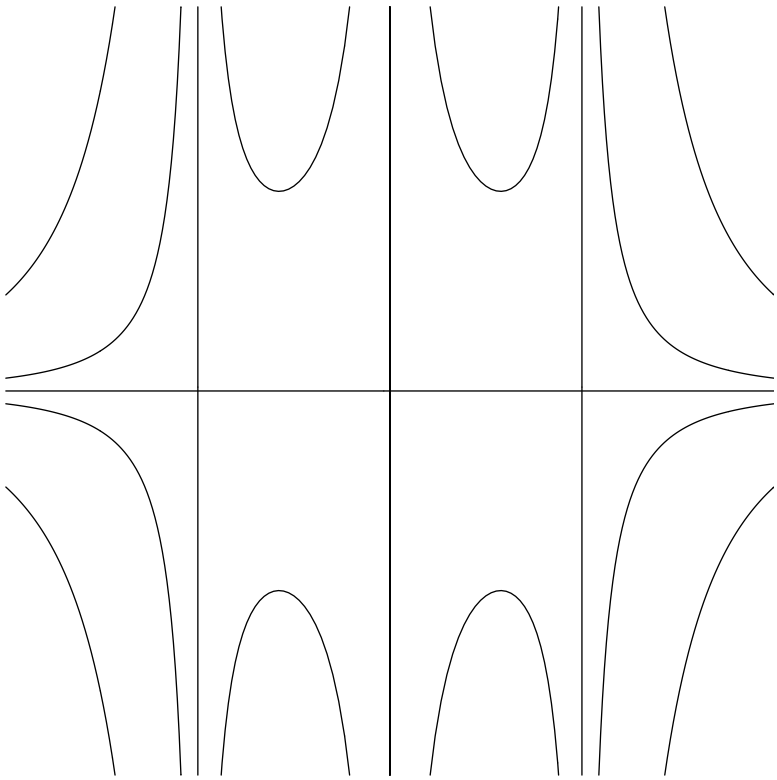

Figura 2. Curve di livello di $H(x, y)$ per $\alpha < 0$.

Esercizio 3.

6.1. Stabilità asintotica dei punti di minimo. Cfr. Cap. 5, §21, paragrafi 21.4 e 21.7.

3.2. Esempio. Si ha

$$\nabla V(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) = \left(4x_1^3, 2x_2 \right),$$

così che $\nabla V(x_1, x_2) = 0$ solo per $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Quindi l'origine è l'unico punto critico di V, e, di conseguenza, l'unico punto d'equilibrio del sistema.

Inoltre tale punto è un punto di minimo isolato (poiché $V(0, 0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$ per ogni $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$), quindi possiamo applicare il risultato del punto precedente e concludere che che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

Le curve di livello di V sono le curve

$$\Sigma_c = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^2 = c \right\},$$

che si possono riscrivere come

$$\Sigma_c = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \pm f(x_1), \qquad |x_1| \leq c^{1/4} \right\}, \qquad f(x) = \sqrt{c - x^4},$$

dove $c \geq 0$.

La funzione $x \to f(x)$ è definita per $|x| < c^{1/4}$, e per tali valori di x si ha

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{2x^3}{f(x)},$$

quindi f è crescente per $-c^{1/4} \leq x < 0$ e decrescente per $0 < x < c^{1/4}$, la sua derivata vale $\pm\infty$ per $x = \mp c^{1/4}$ e si annulla per $x = 0$. Concludiamo allora che per ogni $c \geq 0$ la curva Σ_c è una curva chiusa che contiene l'origine $(0, 0)$ al suo interno.

Inoltre la regione

$$B_c = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : V(x_1, x_2) \leq c \right\}$$

definisce un insieme compatto positivamente invariante: infatti su ∂B_c il campo vettoriale è ortogonale alla curva e diretto verso l'interno (in quanto $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$ e V cresce allontanadosi dall'origine). Inoltre $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$ solo per $(x_1, x_2) = (0, 0)$ e $V(x_1, x_2) < 0$ per ogni altro punto (x_1, x_2). Possiamo quindi applicare il teorema di Barbašin-Krasovskij, per concludere che B_c è contenuto nel bacino d'attrazione dell'origine. Per l'arbitrarietà di c il bacino d'attrazione deve essere l'intero piano.

Si noti che lo stesso risultato si poteva ottenere con il teorema di Ljapunov.

ESERCIZIO 4. Lo spettro $\Sigma(A)$ della matrice A si trova risolvendo l'equazione

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2),$$

quindi $\Sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 2\}$. Gli autovettori corrispondenti si ottengono imponendo

$$(A - \lambda_k \mathbb{1})\, v_k = \begin{pmatrix} 1-\lambda_k & 1 \\ 1 & 1-\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2,$$

e sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \Longrightarrow \quad v_1 = (1, -1), \\ \lambda_2 = 2 & \Longrightarrow \quad v_2 = (1, 1). \end{cases}$$

La matrice del cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$A = Q^{-1} B Q, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e, analogamente, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$At = Q^{-1}(Bt)Q, \qquad Bt = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\exp(At) = \mathrm{e}^{At} = Q^{-1}\mathrm{e}^{Bt}Q, \qquad \mathrm{e}^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

che dà

$$\mathrm{e}^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}+1 & \mathrm{e}^{2t}-1 \\ \mathrm{e}^{2t}-1 & \mathrm{e}^{2t}+1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è allora

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}+1 & \mathrm{e}^{2t}-1 \\ \mathrm{e}^{2t}-1 & \mathrm{e}^{2t}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che implica

$$x_1(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}, \qquad x_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}.$$

Esercizio 5.

5.1. Unicità della soluzione. La funzione $x \to |x|$ è lipschitziana, quindi si applica il teorema di esistenza e unicità: quindi il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.

5.2. Soluzione e sua regolarità. Se $x_0 = 0$ si vede subito che $x(t) = 0$ è soluzione. Se $x_0 \neq 0$, si distinguano i casi $x_0 > 0$ e $x_0 < 0$.

Consideriamo prima il caso $x_0 > 0$. Poiché la soluzione è continua in t, se $x_0 > 0$ allora la soluzione $x(t)$ verificherà $x(t) > 0$ almeno per t piccoli. Per tali t l'equazione diventa $\dot{x} = x$, che si risolve per separazione di variabili:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^t \mathrm{d}s = t \qquad \Longrightarrow \qquad \log|x(t)| - \log|x_0| = t,$$

dove possiamo scrivere $|x(t)| = x(t)$ e $|x_0| = x_0$. Quindi otteniamo $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$, fintanto che $x(t) > 0$. Ma $\mathrm{e}^t > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$ è la soluzione per $x_0 > 0$.

Per $x_0 < 0$ si ragiona in modo analogo, e si arriva all'equazione $\dot{x} = -x$, che di nuovo si risolve per separazione di variabili:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int_0^t \mathrm{d}s = -t \qquad \Longrightarrow \qquad \log|x(t)| - \log|x_0| = -t,$$

che dà $|x(t)| = \mathrm{e}^{-t}|x_0|$. Tenendo conto che $|x(t)| = -x(t)$ e $|x_0| = -x_0$, troviamo $x(t) = \mathrm{e}^{-t}x_0$, fintanto che $x(t) < 0$. Come nel caso precedente possiamo quindi concludere che la soluzione è $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$ per $x_0 < 0$. Tenendo conto che per $x_0 = 0$ la soluzione è $x(t) = 0$ per $x_0 = 0$ possiamo scrivere che la soluzione è

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t x_0, & x_0 \geq 0, \\ \mathrm{e}^{-t} x_0, & x_0 < 0, \end{cases}$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare la soluzione è C^∞ in t.

5.3. Stabilità dell'origine. Si è verificato al punto precedente che $x = 0$ è un punto d'equilibrio: infatti il campo vettoriale si annulla per $x = 0$. La soluzione è data da $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$ per $x_0 > 0$, quindi si ha

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty \qquad \text{se } x_0 > 0,$$

così che possiamo concludere che l'origine è un punto d'equilibrio instabile.

Esercizio 6.

6.1. Costante del moto. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H(x,y) &= y\left(y^2 - (x+1)^2\right)\left(y^2 - (x-1)^2\right) = y^5 - y^3\left((x-1)^2 + (x+1)^2\right) + y(x+1)^2(x-1)^2 \\ &= y^5 - 2y^3\left(x^2+1\right) + y(x^2-1)^2. \end{aligned}$$

Si ha

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x} = -4xy^3 + 4xy\left(x^2 - 1\right) = -4xy\left(y^2 - x^2 + 1\right),$$
$$H_y = \frac{\partial H}{\partial y} = 5y^4 - 6y^2\left(x^2 + 1\right) + (x^2 - 1)^2.$$

quindi $\dot{x} = H_y$ e $\dot{y} = -H_x$, così che

$$\dot{H} = H_x\dot{x} + H_y\dot{y} = H_xH_y - H_yH_x = 0.$$

6.2. Punti d'equilibrio. Si ha $\dot{y} = 0$ per $x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $x^2 = 1 + y^2$. Imponendo che per tali valori anche $\dot{x} = 0$ si trova:

$$\begin{cases} x = 0 & \Longrightarrow \quad 5y^4 - 6y^2 + 1 = 0, \\ y = 0 & \Longrightarrow \quad x^2 - 1 = 0, \\ x^2 = 1 + y^2 & \Longrightarrow \quad 5y^4 - 6y^2\left(2 + y^2\right) + y^4 = 0. \end{cases}$$

Quindi per $x = 0$ abbiamo

$$y^2 = \frac{1}{5}\left(3 \pm \sqrt{9 - 5}\right) = \frac{3 \pm 2}{5} = \begin{cases} 1, \\ 1/5, \end{cases}$$

che dà i quattro punti d'equilibrio

$$P_1 = (0, 1), \qquad P_2 = (0, 1/\sqrt{5}), \qquad P_3 = (0, -1/\sqrt{5}), \qquad P_4 = (0, -1).$$

Per $y = 0$ troviamo $x = \pm 1$, che implica due altri punti d'equilibrio

$$P_5 = (1, 0), \qquad P_6 = (-1, 0).$$

Infine, se scriviamo $x^2 = 1 + y^2$, y deve soddisfare l'equazione

$$5y^4 - 12y^2 - 6y^4 + y^4 = -12y^2 = 0,$$

che implica $y = 0$, e quindi $x = \pm 1$. Di conseguenza ritroviamo i punti d'equilibrio P_5 e P_6.

Si hanno quindi in tutto i 6 punti d'equilibrio $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, 1/\sqrt{5})$, $P_3 = (0, -1/\sqrt{5})$, $P_4 = (0, -1)$, $P_5 = (1, 0)$ e $P_6 = (-1, 0)$; cfr. Figura 1.

6.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Sia $A(x, y)$ la matrice del sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio (x, y). Si ha

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{xy} \end{pmatrix},$$

dove

$$H_{xx} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -4y^3 + 12yx^2 - 4y = 4y\left(3x^2 - y^2 - 1\right),$$
$$H_{xy} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -12xy^2 + 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 3y^2 - 1\right),$$
$$H_{yy} = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 20y^3 - 12y\left(x^2 + 1\right) = 4y\left(5y^2 - 3x^2 - 3\right).$$

Si ottiene

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 8 \\ \pm 8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(0, \pm 1/\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 8/\sqrt{5} \\ \pm 24/5\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix},$$

e gli autovalori corrispondenti sono:

$$\begin{cases} P_1 & \Longrightarrow & \lambda_1 = -\lambda_2 = 8, \\ P_2 & \Longrightarrow & \lambda_1 = -\lambda_2 = i8\sqrt{3}/5, \\ P_3 & \Longrightarrow & \lambda_1 = -\lambda_2 = i8\sqrt{3}/5, \\ P_4 & \Longrightarrow & \lambda_1 = -\lambda_2 = 8, \\ P_5 & \Longrightarrow & \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \\ P_6 & \Longrightarrow & \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Possiamo concludere che P_1 e P_4 sono punti d'equilibrio instabile poiché almeno un autovalore del sistema linearizzato ha parte reale positiva.

Non possiamo invece concludere nulla riguardo agli altri punti. Prima di procedere andiamo a studiare le curve di livello della funzione H,

$$\Gamma_E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\right\},$$

iniziando dai valori che corrispondono ai punti d'equilibrio instabile trovati, cioè P_1 e P_4.

Si ha $H(0, \pm 1) = 0$. Si vede subito che Γ_0 è data dall'unione di quattro rette:

$$\Gamma_0 = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4,$$
$$\mathcal{C}_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\},$$
$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\right\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1\right\},$$
$$\mathcal{C}_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + 1\right\},$$
$$\mathcal{C}_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x - 1\right\},$$

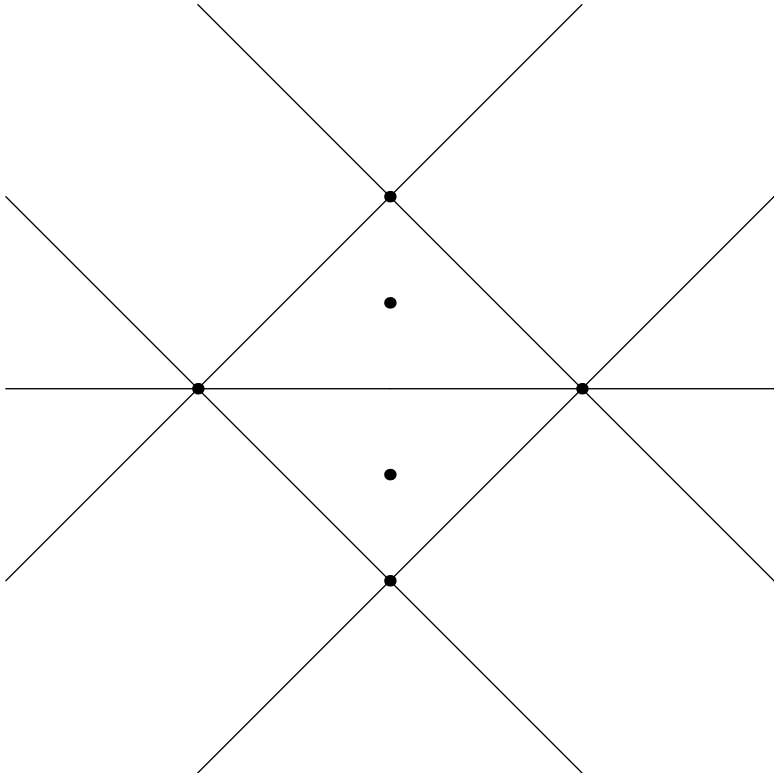

Figura 1. Curva di livello Γ_0 e punti d'equilibrio.

e contiene, oltre ai punti P_1 e P_4, anche i punti P_5 e P_6. Tali rette sono invarianti. La situazione è rappresentata in Figura 1.

I versi di percorrenza si ricavano immediatamente dal campo vettoriale.

Sulla retta $\mathcal{C}_0$ si ha $y = 0$, quindi $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = (x-1)^2 > 0$ per $|x| \neq 1$, così che il verso di percorrenza è sempre da sinistra a destra.

Sulla retta $\mathcal{C}_1$, ove $y = x + 1$, si ha $\dot{y} = 4x(x+1)\left((x+1)^2 + 1 - x^2\right) = 8x(x+1)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x > 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x < 0$.

Sulla retta $\mathcal{C}_2$, ove $y = x - 1$, si ha $\dot{y} = 4x(x-1)\left((x-1)^2 + 1 - x^2\right) = -8x(x-1)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x < 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x > 0$.

Sulla retta $\mathcal{C}_3$, ove $y = -x + 1$, si ha $\dot{y} = 4x(1-x)\left((1-x)^2 + 1 - x^2\right) = 8x(1-x)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x > 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x < 0$.

Sulla retta $\mathcal{C}_4$, ove $y = -x - 1$, si ha $\dot{y} = -4x(1+x)\left((1+x)^2 + 1 - x^2\right) = -8x(1+x)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x < 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x > 0$.

Si vede in particolare ci sono direzioni lungo le quali ci si allontana dal punto d'equilibrio P_5 e direzioni lungo l e quali ci si allontana dal punto d'equilibrio P_6: quindi anche P_5 e P_6 sono punti d'equilibrio instabile.

Per studiare la stabilità dei punti d'equilibrio restanti cerchiamo di applicare il teorema di Ljapunov.

Consideriamo la regione compatta A definita da

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - |x| \right\},$$

cioè la regione racchiusa tra le curve $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$. Sulla frontiera di A la funzione H si annulla, e all'interno c'è un solo puntio stazionario, P_2, dove la funzione H assume il valore

$$H(0, 1/\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{25} - \frac{2}{5} + 1 \right) = \frac{1 - 10 + 25}{25\sqrt{5}} > 0.$$

Quindi, per continuità, la funzione H è sempre strettamente positiva all'interno di A.

Poiché per il teorema di Weierstrass la funzione H deve avere massimi e minimi in A possiamo quindi concludere che il valore minimo è 0 ed è assunto sulla frontiera, mentre il valore massimo è $H(0, 1/\sqrt{5})$ ed è assunto in P_2.

In conclusione P_2 è un punto di massimo (locale) per H. Possiamo quindi definire la funzione di Ljapunov

$$W(x, y) = -\left(H(x, y) - H(P_2) \right),$$

in modo che, comunque preso un intorno $B \subset A$ di P_2, si abbia
(1) $W(P_2) = 0$ e $W(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B \setminus \{P_2\}$,
(2) $\dot{W}(x, y) = \dot{H}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in B$.
In conclusione, possiamo applicare il teorema di Ljapunov che, sotto tali ipotesi, implica la stabilità del punto P_2.

Analogamente, notando che

$$H(0, -1/\sqrt{5}) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{25} - \frac{2}{5} + 1 \right) = -\frac{1 - 10 + 25}{25\sqrt{5}} < 0,$$

abbiamo che P_3 è un punto di minimo (locale) per H, e possiamo quindi applicare il teorema di Ljapunov prendendo

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_3)$$

come funzione di Ljapunov, e concludere che anche P_3 è un punto d'equilibrio stabile.

6.4. Analisi qualitativa. L'analisi qualitatitva è già stata iniziata al punto precedente, dove sono state studiate le traiettorie con supporto sulla curva di livello Γ_0.

Le altre traiettorie possono essere studiate nel modo seguente. Data la regolarità della funzione H le curve di livello Γ_E per E vicino a 0 rimangono vicino alla curva di livello Γ_0. Poiché le curve di livello Γ_E per $E \neq 0$ non contengono punti d'equilibrio (tranne che per i valori di E tali che $E = H(0, 1/\sqrt{5})$ o $E = H(0, -1/\sqrt{5})$), allora saranno curve regolari. Man mano che ci si allontana dal valore $E = 0$ le curve

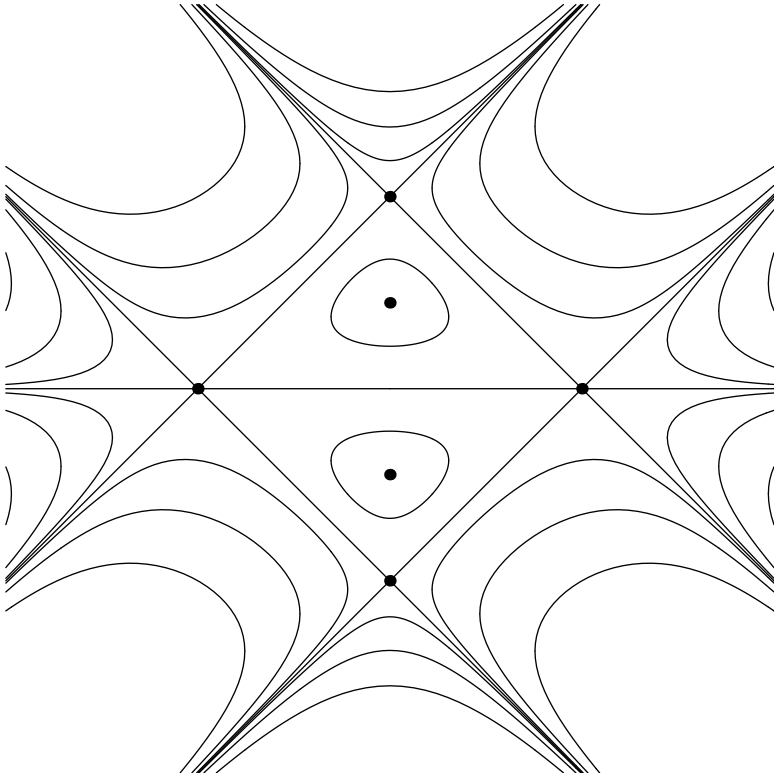

Figura 2. Curve di livello Γ_E per alcuni valori di E.

saranno sempre più distanti da Γ_0, ma varieranno sempre con continuità al variare di E. Cfr. la Figura 2.

I versi di percorrenza si possono ricavare per continuità. Se E è vicino a 0, si usa la dipendenza continua dai dati iniziali per concludere che ci si muove con verso consistente con quello di percorrenza della curva di livello Γ_0. Variando ulteriormente E il verso si mantiene consistente perché per cambiare dovrebbe prima annullarsi il campo vettoriale, e questo non è possibile al di fuori dei punti d'equilibrio.

All'interno della regione A e della regione

$$A' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \quad 0 \geq y \geq 1 - |x|\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,-y) \in A\right\},$$

che si ottiene da A per riflessione rispetto all'asse x, si hanno traiettorie periodiche, con orbite che contengono al loro interno uno dei due punti d'equilibrio.

Infatti sia A sia A' sono racchiuse da una componente connessa della curva di livello Γ_0 e al loro interno c'è un unico punto d'equilibrio, che è un punto d'equilibrio stabile. Allora possiamo applicare il Teorema che afferma che, sotto tali condizioni, tutte le

traiettorie con dati iniziali in $\mathrm{int}(A) \setminus P_2$ e in $\mathrm{int}(A') \setminus P_3$ sono periodiche e hanno orbite chiuse che contenegono i punti P_2 e P_3, rispettivamente, al loro interno.

ESERCIZIO 7.

7.1. Stabilità dell'origine. Cerchiamo di scrivere il sistema dinamico nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

per qualche funzione $H = H(x, y)$.

Integrando la prima equazione del sistema rispetto a y si trova

$$H(x, y) = y^2 + f(x),$$

dove $f = f(x)$ è una funzione arbitraria di x.

Integrando la seconda equazione del sistema rispetto a y si trova

$$H(x, y) = 2x^2 - x^4 + g(y),$$

dove $g = g(y)$ è una funzione arbitraria di y.

Uguagliando le due espressioni troviamo

$$H(x, y) = y^2 + 2x^2 - x^4 + c = y^2 + 2x^2 - x^4,$$

dove c è una costante arbitraria, che abbiamo posto uguale a 0. Quindi la funzione $H = H(x, y)$ è una costante del moto.

Si vede subito che $(0, 0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema. Per dimostrarne la stabilità applichiamo il teorema di Ljapunov.

La funzione H si annulla in $(x, y) = (0, 0)$. Inoltre $(0, 0)$ è un punto stazionario poiché $\partial H/\partial x = \partial H/\partial y = 0$ in $(0, 0)$. Calcoliamo la matrice hessiana di H in $(0, 0)$.

Le derivate seconde di H sono

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 4 - 12x^2, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 2,$$

quindi la matrice hessiana in $(x, y) = (0, 0)$ vale

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

così che $\det \mathcal{H} = 8 > 0$ e $\mathcal{H}_{11} = 4 > 0$: quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo per H.

Definiamo allora la funzione di Ljapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(0,0) = H(x,y).$$

Esiste quindi un intorno B di $(0,0)$ tale che
(1) $W(0,0) = 0$ e $W(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in B \setminus \{(0,0)\}$,
(2) $\dot{W}(x,y) = \dot{H}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in B$.
Quindi per il teorema di Ljapunov l'origine è un punto d'equilibrio stabile.

7.2. Stabilità asintotica dell'origine. Se aggiungiamo un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$ il sistema sarà modificato in

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \alpha x, \\ \dot{y} = 4x^3 - 4x - \alpha y, \end{cases}$$

così che $(0,0)$ è ancora un punto d'equilibrio.

La matrice A del sistema linearizzato in un intorno di $(0,0)$ sarà

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 \\ -4 & -\alpha \end{pmatrix},$$

quindi gli autovalori di A si ottengono risolvendo l'equazione

$$(-\alpha - \lambda)^2 + 8 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = -\alpha \pm i2\sqrt{2},$$

e quindi entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa. Quindi l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 8. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di A, e siano $n_1, \dots, n_r$ le rispettive molteplicità. La soluzione del sistema $\dot{x} = Ax$ è definita globalmente (cioè per ogni $t \in \mathbb{R}$) si può scrivere nella forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_k t} P^{(k)}(t),$$

dove $P^{(k)}(t)$ è un polinomio di grado $n_k - 1$ in t (che dipende dai dati iniziali). Poiché per ipotesi $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ per ogni $k = 1, \dots, r$ si ha

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{e}^{\lambda_k t} P^{(k)}(t) = 0, \qquad k = 1, \dots, r,$$

e quindi

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

indipendentemente dal dato iniziale. Quindi, quale che sia il dato iniziale $\bar{x}$, la soluzione $x(t) = \varphi(t, \bar{x})$ tende a 0 per $t \to \infty$. Ne segue che $x = 0$ è un punto d'equilibrio stabile e attrattivo, e quindi è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.