Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VI - LIVIA CORSI (02-04-2006)

CORREZIONE

ESERCIZIO 1.

1.1. Sistema dinamico associato. Posto $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = x^2(2x^2 - 3)e^{-x^2}. \end{cases}$$

1.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Sappiamo che si ha equilibrio nei punti $(x_0, 0)$, con x_0 punto critico del potenziale, e si vede facilmente che $V'(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3/2}$, quindi i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = \left(\sqrt{3/2}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\sqrt{3/2}, 0\right).$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $|x| < \sqrt{3/2}$, quindi $x = -\sqrt{3/2}$ è un punto di minimo, $x = \sqrt{3/2}$ è un punto di massimo, e $x = 0$ è un punto di flesso. Perciò avremo che P_2 è stabile mentre P_0 e P_1 sono instabili. Notiamo inoltre che $V''(x) \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

1.3. Grafico dell'energia potenziale. Innanzitutto $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$ e che $x = 0$ è l'unico punto in cui si ha $V(x) = 0$. Lo studio della derivata è già stato fatto al punto precedente.

1.4. Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre $x = -\sqrt{3/2}$ è un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano dell fasi sarà possibile solo per $E \geq V(-\sqrt{3/2})$. Per $E = V(-\sqrt{3/2}$ avremo quindi il solo punto d'equilibrio stabile P_2. Per $V(-\sqrt{3/2}) < E < 0$ avremo una triettoria periodica intorno al punto stabile P_2. Per $E = 0$ avremo due traiettoria aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} y(x) = 0$ a tangenza orizzontale (cuspide), e il punto instabile P_0. Per avremo $0 < E < V(\sqrt{3/2})$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed un'altra, sempre aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$. Per $E = V(\sqrt{3/2})$ avremo due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, il punto instabile P_1 e due traiettorie

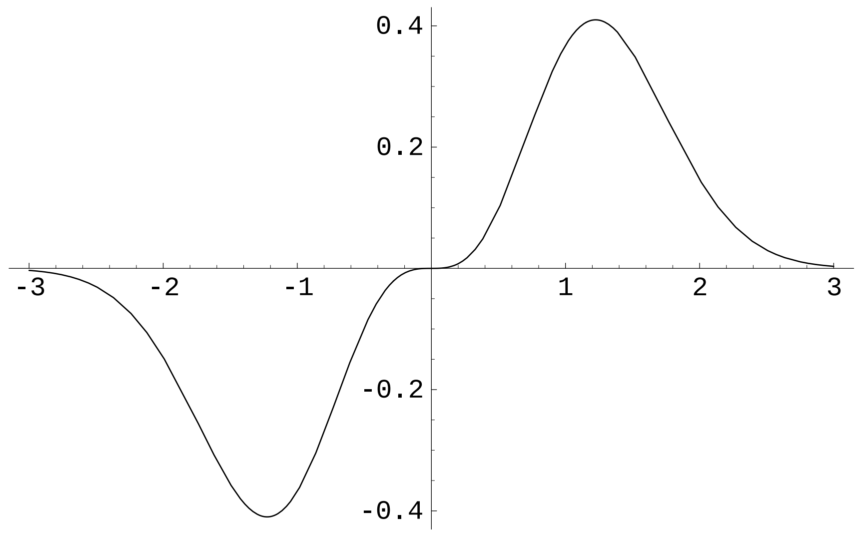

Figura 1. Grafico del potenziale $V(x)$.

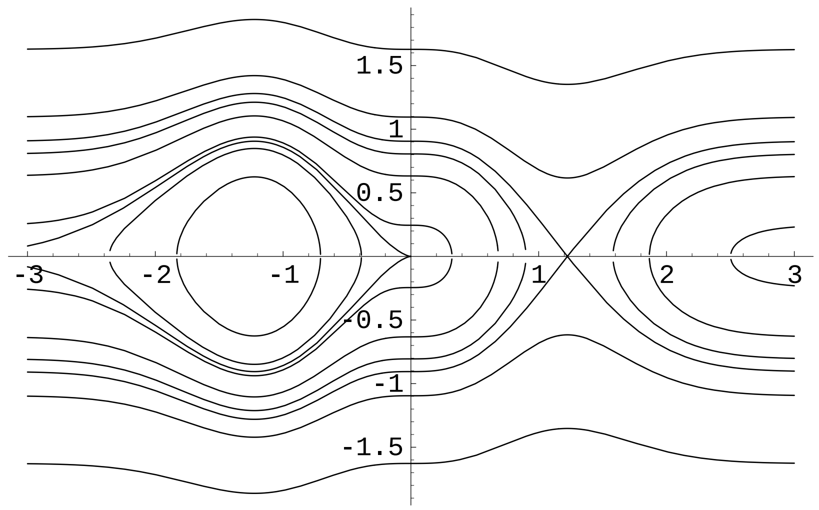

Figura 2. Grafico del piano delle fasi.

aperte con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ Per $E > V(\sqrt{3/2})$ avremo due traiettorie di cui, una con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$, e l'altra con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$.

<u>Esercizio 2.</u>

2.1. Sistema dinamico associato. Ponendo $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 10x. \end{cases}$$

2.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Sappiamo che si ha equilibrio per i punti $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di $V(x)$. Si vede facilmente che $V'(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, quindi i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0,0) \qquad P_1 = \left(\sqrt{5/2}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\sqrt{5/2}, 0\right)$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $x < -\sqrt{5/2}$ e per $0 < x < \sqrt{5/2}$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo mentre $x = \pm\sqrt{5/2}$ sono punti di massimo del potenziale. Perciò avremo che P_0 è stabile mentre P_1 e P_2 sono instabili. Notiamo inoltre che $V(\sqrt{5/2}) = V(-\sqrt{5/2})$ e che $V''(x) \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

2.3. Grafico del Potenziale e piano delle fasi. Osserviamo che il potenziale è un polinomio di quarto grado con coefficiente direttore negativo, e che solo il termine noto dipende dal parametro α. Pertanto tracciamo il grafico solo nel caso $\alpha = 0$.

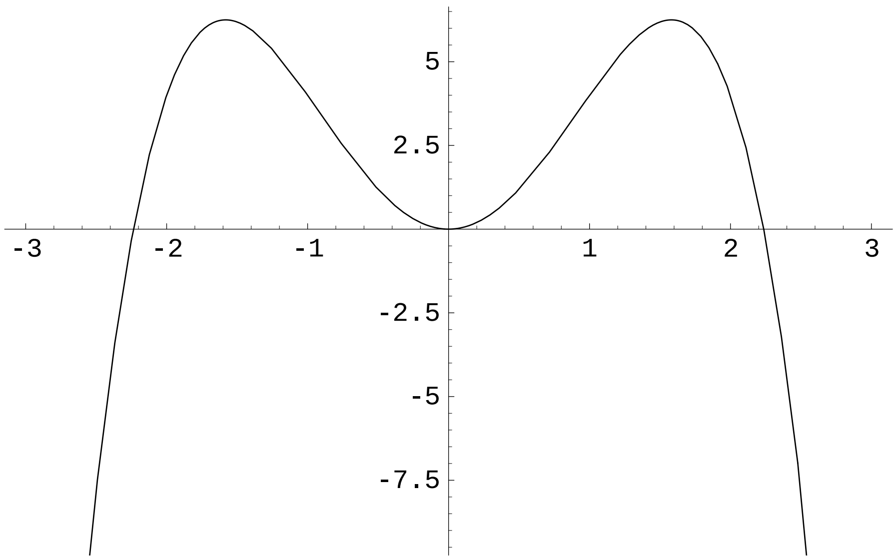

Figura 3. Grafico del potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$.

Ora, da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $\inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) = -\infty$ quindi il moto nel piano delle fasi è possibile per ogni valore dell'energia. In particolare, per $E < V(0)$ avremo due traiettorie aperte. Per $E = V(0)$ avremo due traiettorie aperte e il punto d'equilibrio stabile P_0. Per $V(0) < E < V(\sqrt{5/2})$ avremo una traiettoria periodica intorno a P_0 e due traiettorie aperte. Per $E = V(\sqrt{5/2})$ avremo due traiettorie eterocline a intersezione trasversa, quattro traiettorie aperte e i puni instabili P_1 e P_2. Per $E > V(\sqrt{5/2})$ avremo due traiettorie aperte, una tutta contenuta nel semipiano $y > 0$ e l'altra, simmetrica alla prima rispetto all'asse x.

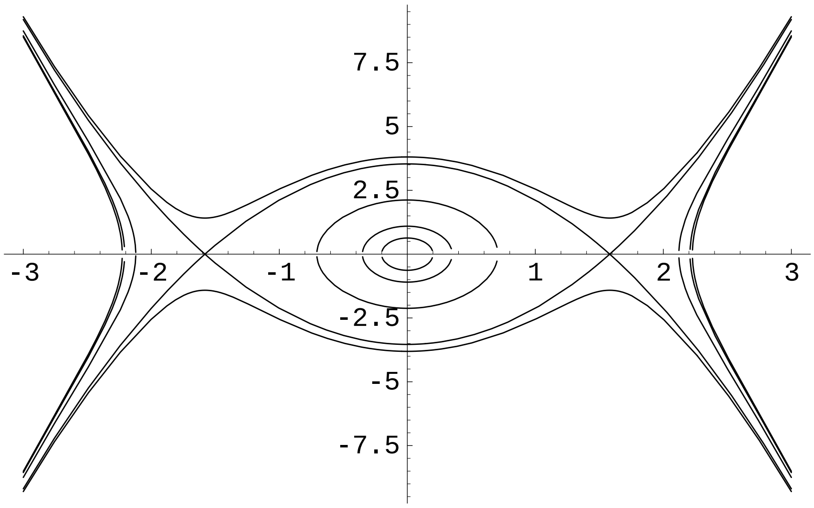

Figura 4. Grafico del piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano in cui $y > 0$.

2.4 Esistenza di una traiettoria periodica. Per $\alpha = 4$ abbiamo

$$V(x) = -(x^4 - 5x^2 + 4) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$$

quindi $V(0) = -4$ e $V(\sqrt{5/2}) = 21/4$ perciò $-4 < E < 21/4$ e dunque, per quanto visto al punto precedente, esiste una traiettoria periodica a tale livello di energia.

2.5. Periodo come integrale definito. Imponendo $V(x) = 0$ troviamo i punti $x = \pm 1$ e $x = \pm 4$. Affinché sia soddisfatta la condizione di esistenza della traiettoria periodica, deve valere $-\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}$, quindi i punti sulla traiettoria periodica sono $x_{\pm} = \pm 1$. Il periodo di tale traiettoria sarà quindi

$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$$

Stima del periodo. Notiamo che

$$E - V(x) = -V(x) = (1 - x^2)(4 - x^2) = (x + 1)(1 - x)(4 - x^2)$$

che è quindi della forma $(x-x_-)(x_+-x)\phi(x)$ con $\phi(x) = 4-x^2$ e inoltre $3 \leq \phi(x) \leq 4$ $\forall x \in [-1, 1]$ perciò una stima del periodo è data da

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\pi$$

<u>Esercizio 3.</u>

Energia potenziale. Poicé deve valere $\ddot{x} = -V'(x)$, il potenziale è dato dall'integrale del secondo membro dell'equazione cambiato di segno, i.e.

$$V(x) = \int_0^x \mathrm{d}x \, \frac{-x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

e integrando otteniamo

$$V(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} + c$$

dove c è una costante d'integrazione arbitraria. Imponendo poi $V(0) = -1/2$ troviamo $c = 0$.

3.1. Traiettoria periodica. Innanzitutto vediamo che, ponendo

$$\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} = -\frac{1}{5}$$

troviamo $x_\pm = (-3 \pm \sqrt{21})/2$; osserviamo inoltre che $V(x) \leq E$ se e solo se $x \in [x_-, x_+]$. Infine notiamo che $x_\pm$ non sono punti critici si $V(x)$, infatti

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x_-) = -\frac{2(21 + 5\sqrt{21})}{25(5 + \sqrt{21})^2} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x_+) = \frac{2(21 - 5\sqrt{21})}{25(5 - \sqrt{21})^2} \neq 0$$

quindi[1] il moto su Γ_E è periodico.

3.2. Stima del periodo. Notiamo che

$$E - V(x) = (x - x_-)(x_+ - x)\phi(x) \quad \text{con} \quad \phi(x) = \frac{1}{5(x^2 - 2x + 2)}$$

Inoltre ϕ è strettamente crescente nell'intervallo $[x_-, x_+]$ e quindi avremo che

$$\phi(x_-) = 2/[25(5 + \sqrt{21})] \leq \phi(x) \leq 2/[25(5 - \sqrt{21})] = \phi(x_+) \qquad \forall x \in [x_-, x_+]$$

---

[1] cfr. Lemma 27.18 sulle dispense del corso.

pericò una stima del periodo è data da

$$5\pi\sqrt{5-\sqrt{21}} \leq T \leq 5\pi\sqrt{5+\sqrt{21}}$$

Notiamo che non si tratta certamente di una stima ottimale; infatti si vede che un'approssimazione numerica di tale stima è

$$10.1487 \leq T \leq 48.6252$$

3.3. Punti d'equilibrio. Considerato il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}, \end{cases}$$

i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico del potenziale; pertanto dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 0$$

e questa ha soluzione per $x = 0$ e $x = 2$. Perciò i punti d'equilibrio del sistema sono i punti $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (2, 0)$.

Stabilità dei punti d'equilibrio. Il teorema di Dirichlet ci assicura che i punti d'equilibrio sono stabili se e solo se x_0 è un punto di minimo del potenziale. Derivando ulteriormente il potenziale otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^3}$$

e $[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2](0) = 1/2 > 0$ quindi $x = 0$ è un punto di minimo del potenziale, pertanto P_0 sarà un punto d'equilibrio stabile per il sistema. D'altra parte, $[\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}x^2](2) = -1/2 < 0$ quindi $x = 2$ è un punto di massimo per il potenziale, quindi P_1 sarà un punto d'equilibrio instabile.

3.4. Grafico del potenziale. Si verifica che $V(0) = -1/2$ e $V(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$$

Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre $x = -1/2$ è un minimo assoluto del potenziale, perciò il moto nel piano dell fasi sarà possibile solo per $E \geq V(-1/2)$. Per $E = V(-1/2)$ avremo quindi il solo punto d'equilibrio sttabile P_0. Per $V(-1/2) < E < 0$ avremo una triettoria periodica intorno al punto stabile P_0. Per $E = 0$ avremo una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$. Per avremo $0 < E < V(1/2)$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed un'altra, sempre aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$. Per $E = V(1/2)$ avremo due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, il punto instabile P_1 e due traiettorie aperte con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ Per $E > V(1/2)$ avremo due traiettorie di cui, una con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$, e l'altra con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$.

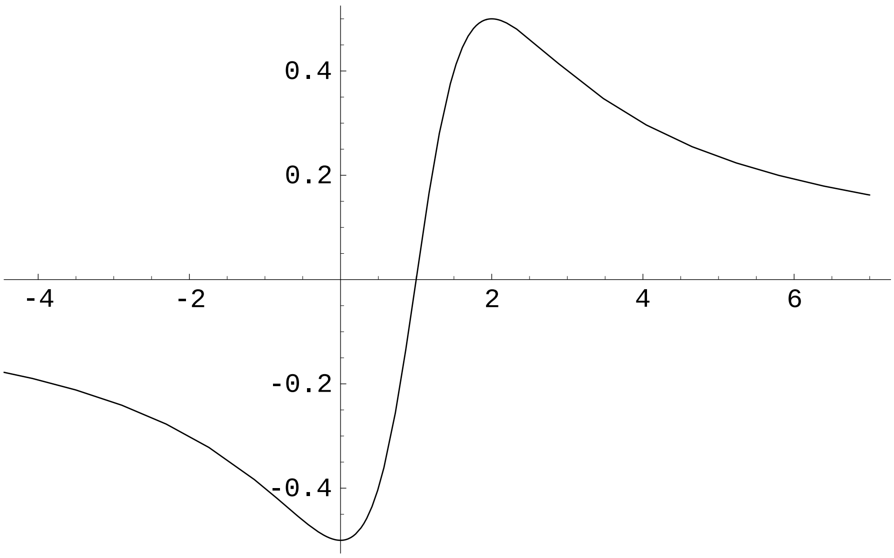

Figura 5. Grafico del potenziale.

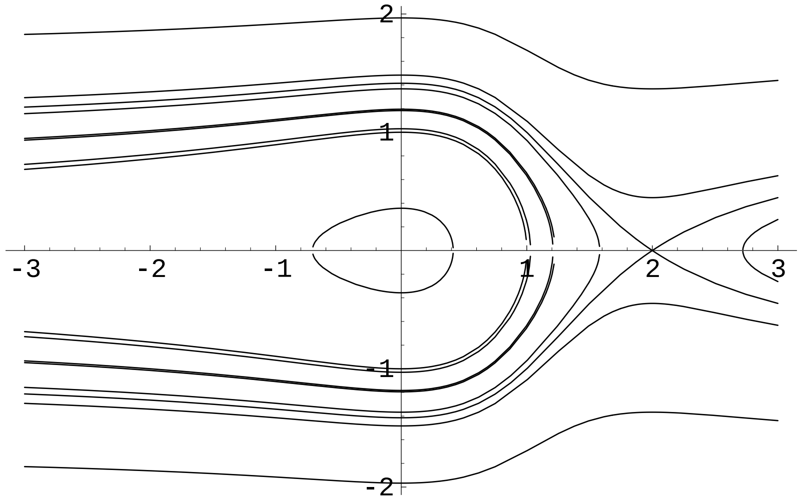

Figura 6. Grafico del piano delle fasi.