Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VIII - LIVIA CORSI (23-04-2008)

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1.

1.1. Sistema dinamico associato. Posto $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{5x^2+x-4}{4x^2} e^{x/4}. \end{cases}$$

1.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Sappiamo che si ha equilibrio nei punti $(x_0, 0)$, con x_0 punto critico del potenziale, e si vede facilmente che $V'(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 5/4$, quindi i punti d'equilibrio sono

$$P_1 = (-1, 0), \qquad P_2 = \left(\frac{5}{4}, 0\right).$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $x < -1$ e $x > 5/4$, quindi $x = -1$ è un punto di massimo, mentre $x = \sqrt{3/2}$ è un punto di minimo. Perciò avremo che P_1 è instabile mentre P_2 è stabile. Notiamo inoltre che $V''(-1) = -e^{-1/4}9/4$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

1.3. Grafico dell'energia potenziale. Innanzitutto calcoliamo $\lim_{x\to-\infty} V(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^\pm} V(x) = \pm\infty$ e che $x = -1/5$ è l'unico punto in cui si ha $V(x) = 0$. Lo studio della derivata è già stato fatto al punto precedente.

1.4. Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Per $E \leq 0$ avremo curve aperte aventi l'asse y come asintoto verticale. Per $0 < E < V(-1)$ avremo una curva aperta con l'asse y come asintoto verticale e un'altra con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \sqrt{2E}$. Per $E = V(-1)$ avremo due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \sqrt{2E}$ e due con $\lim_{x\to 0^-} y(x) = \pm\infty$ che si intersecano trasversalmente nel punto instabile P_1. Per avremo $V(-1) < E < V(5/4)$ una traiettoria aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \sqrt{2E}$ e $\lim_{x\to 0} V(x) = +\infty$, ed un'altra, sempre aperta con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$ e $\lim_{x\to 0} V(x) = +\infty$. Per $E = V(5/4)$ avremo due traiettorie aperte come sopra e il

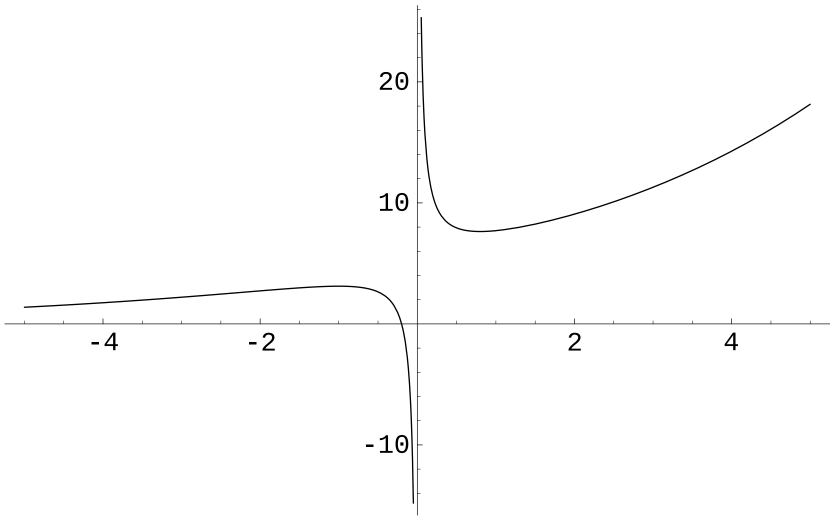

Figura 1. Grafico del potenziale $V(x)$.

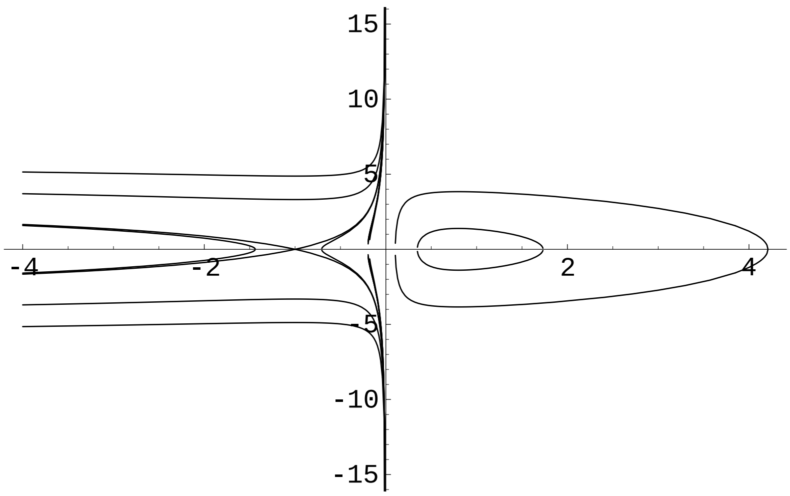

Figura 2. Grafico del piano delle fasi.

punto stabile P_1. Per $E > V(5/4)$ avremo due traiettorie come sopra e una periodica intorno al punto stabile.

<u>Esercizio 2.</u>

2.1. Sistema dinamico associato. Ponendo $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}e^{x/2}(x^2 + 2x - 4). \end{cases}$$

2.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Sappiamo che si ha equilibrio per i punti $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di $V(x)$. Si vede facilmente che $V'(x) = 0$ per $x = -1 \pm \sqrt{5}$, quindi i punti d'equilibrio sono

$$P_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{5}, 0)$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $x < -1 - \sqrt{5}$ e per $x > -1 + \sqrt{5}$, quindi $x = -1 - \sqrt{x}$ è un punto di massimo mentre $x = -1 + \sqrt{5}$ è un punto di minimo del potenziale. Perciò avremo che P_+ è stabile mentre P_- è instabile. Notiamo inoltre che $V''(-1 - \sqrt{5}) = -sqrt5e^{-(1+\sqrt{5})/2}$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

2.3. Grafico del Potenziale e piano delle fasi. Si vede immediatamente che $\lim_{x\to-\infty} V(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$ e $V(x) = 0$ per $x = 0, 2$.

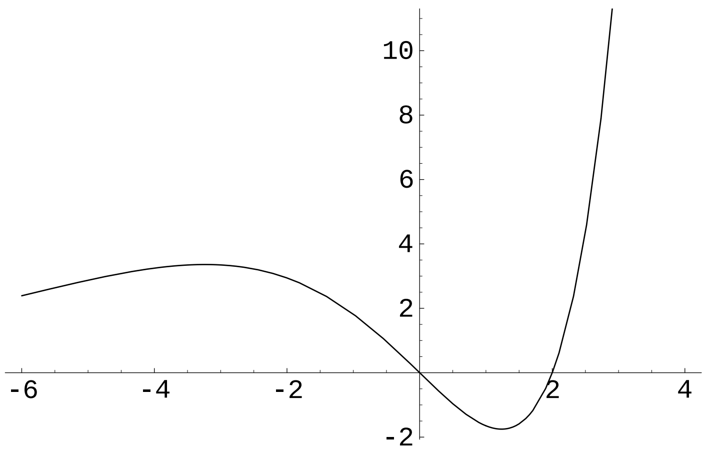

Figura 3. Grafico del potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$.

Ora, da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. In particolare, per $E = V(-1+\sqrt{5})$ avremo il solo punto stabile P_+. Per $V(-1 - \sqrt{5}) < E \leq 0$ avremo una traiettoria periodica intorno a P_+. Per $0 < E < V(-1 - \sqrt{5})$ avremo una traiettoria periodica

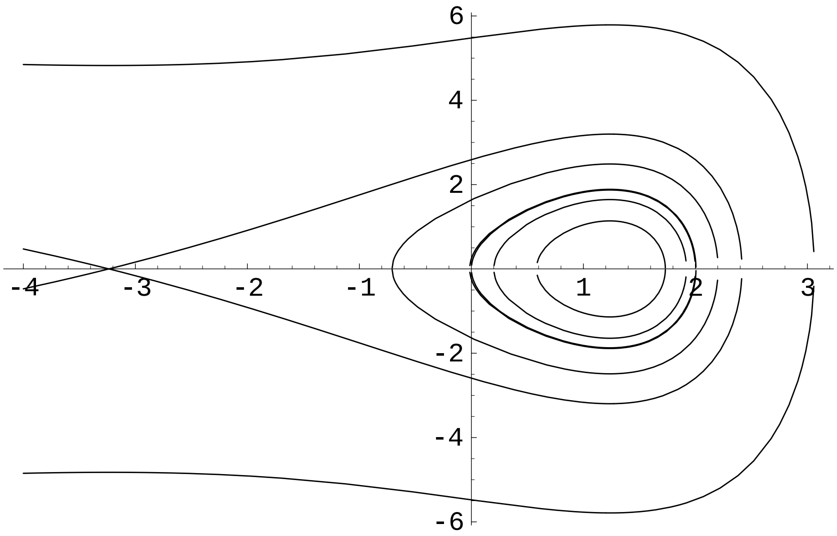

Figura 4. Grafico del piano delle fasi.

intorno a P_0 e una aperta. Per $E = V(-1-\sqrt{5})$ avremo una traiettoria omoclina a intersezione trasversa, due traiettorie aperte e il punto instabile P_-. Per $E > V(-1+\sqrt{5})$ avremo una traiettorie aperta.

2.4 Esistenza di una traiettoria periodica. Per quanto visto al punto precedente, esiste una traiettoria periodica a tale livello di energia.

2.5. Periodo come integrale definito. Imponendo $V(x) = 0$ troviamo i punti $x = 0$ e $x = 2$. Il periodo di tale traiettoria sarà quindi

$$T = \sqrt{2}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)e^{x/2}}$$

Stima del periodo. Notiamo che

$$E - V(x) = -V(x) = x(2-x)e^{x/2}$$

che è quindi della forma $(x-x_-)(x_+-x)\phi(x)$ con $\phi(x) = e^{x/2}$ e inoltre $1 \leq \phi(x) \leq e$ $\forall x \in [-1,1]$ perciò una stima del periodo è data da

$$\sqrt{\frac{2}{e}}\pi \leq T \leq \sqrt{2}\pi$$

<u>Esercizio 3.</u>

Nel seguito considereremo solo l'intervallo $(-3\pi/2, 3\pi/2]$. Chiaramente, i risultati ottenuti si estendono per periodicità a tutta la retta reale.

3.1. Sistema dinamico associato. Avendo posto $y = \dot{x}$, otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \cos x(x - \sin x). \end{cases}$$

3.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Sappiamo che si ha equilibrio per i punti $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di $V(x)$. Si vede facilmente che $V'(x) = 0$ per $x = 0$, $x_1 = 3\pi/2$ e $x_\pm = \pm\pi/2$, quindi i punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (3p/2, 0), \qquad P_\pm = (\pm\pi/2, 0).$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $-3\pi/2 < x < -\pi/2$ e $0 < x < \pi/2$, perciò $x = 0$ e $x = 3\pi/2$ sono punti di minimo, mentre $x = \pm\pi/2$ sono punti di massimo Perciò avremo che P_0 e P_1 sono stabili mentre $P_\pm$ sono instabili. Notiamo inoltre che $V(\pi/2) = V(-\pi/2)$ e che $V''(\pm\pi/2) = 1 - \pi/2 \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

Grafico del potenziale e piano delle fasi.

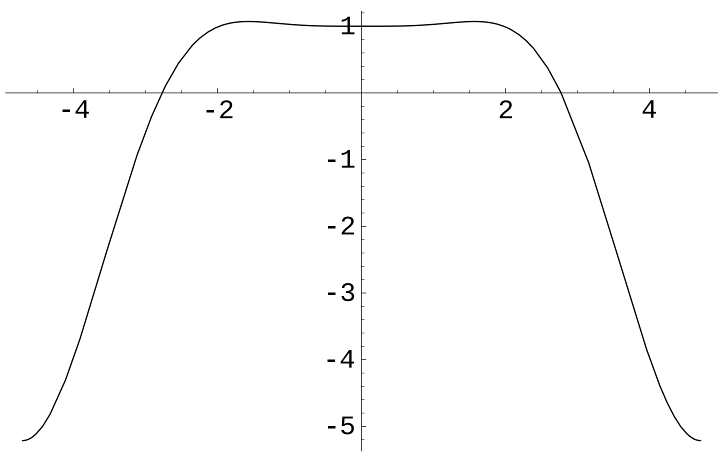

Figura 5. Grafico del potenziale.

Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Per $E = V(3\pi/2)$ avremo quindi il solo punto d'equilibrio stabile P_1. Per $V(3\pi/2) < E < V(0)$ avremo una triettoria periodica intorno al punto stabile P_1. Per $E = V(0)$ avremo una traiettoria periodica attorno a P_1 e il punto stabile P_0. Per avremo $V(0) < E < V(\pm\pi/2)$ una traiettoria periodica attorno a P_1 e un'altra attorno a P_0. ed un'altra, sempre aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$. Per $E = V(\pm\pi/2)$ avremo quattro traiettorie eterocline e i due punti instabili $P_\pm$. Per $E > V(\pm\pi/2)$ avremo due traiettorie periodiche, una sopra e una sotto l'asse x.

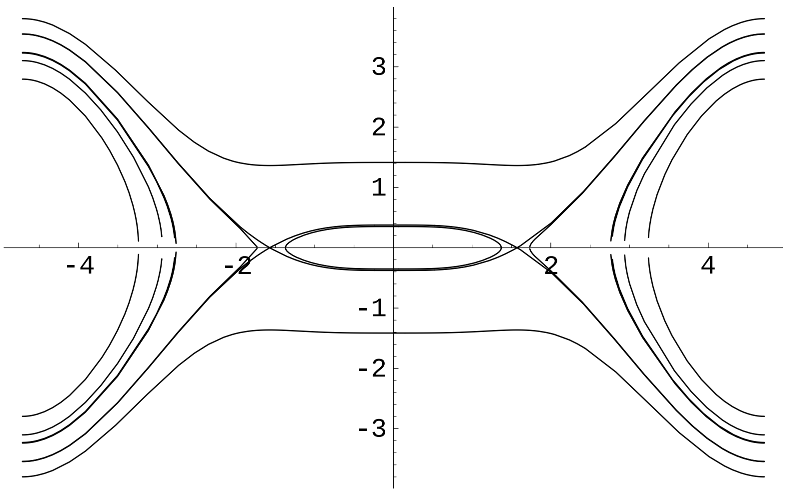

Figura 6. Grafico del piano delle fasi.