

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO IX - LIVIA CORSI (30-04-2008)

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

ESERCIZIO 1.

1.1. Sistema dinamico associato. Ricordiamo che nel sistema del centro di massa, il sistema si disaccoppia, in coordinate polari, nei due problemi

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho}, \quad \ddot{\theta} = \frac{L}{2\mu\rho^2}$$

e quindi, essendo $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 = 1$, diventa

$$\ddot{\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3}, \quad \ddot{\theta} = \frac{L}{2\rho^2}$$

Poiché la parte angolare dipende esclusivamente dalla parte radiale ci concentreremo solo sulla prima delle due equazioni, il cui sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y, \\ \dot{y} = \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3}. \end{cases}$$

1.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Sappiamo che i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace, pertanto dobbiamo risolvere l'equazione $V_{\text{eff}}'(\rho) = 0$. Si verifica immediatamente che tale equazione ha soluzioni

$$\rho_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4L^2}}{2}$$

Si vede quindi che se $\alpha \geq 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali positive (ricordiamo che ρ è un raggio e quindi non può essere un numero negativo). Se invece $\alpha < 0$ scriviamo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$. In questo caso l'equazione ammette soluzioni se e solo se $|L| \leq \beta/2$. In particolare avremo quindi i seguenti casi.

- (i) Per $|L| > \beta/2$ nessun punto d'equilibrio.
- (ii) Per $|L| = \beta/2$ un solo punto d'equilibrio in $P_0 = (\beta/2, 0)$.
- (iii) Per $|L| < \beta/2$ due punti d'equilibrio in $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$ con

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4L^2} \right).$$

Studiamo quindi la stabilità dei punti d'equilibrio. Innanzitutto osserviamo che $[dV_{\text{eff}}/d\rho] < 0 \forall \rho \neq \beta/2$, cioè $\rho = \beta/2$ è una sella del potenziale e quindi P_0 è instabile. Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = -\frac{2\beta}{\rho^3} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

e quindi se $|L| < \beta/2$ avremo che $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_-) > 0$ quindi ρ_- è un minimo del potenziale e dunque P_- è stabile; viceversa $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_+) < 0$ quindi ρ_+ è un massimo, perciò P_+ è instabile.

1.3. Piano delle fasi. Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

indipendentemente dalla scelta dei parametri.

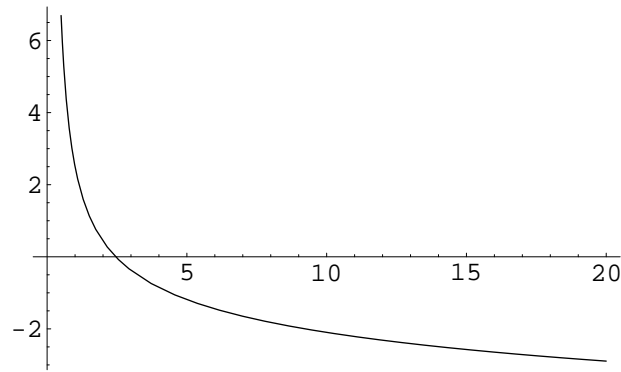


Figura 1. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $\alpha \geq 0$ oppure $|L| > \beta/2$.

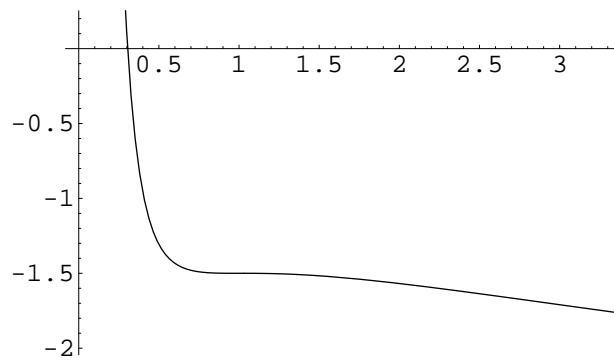


Figura 2. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $|L| = \beta/2$.

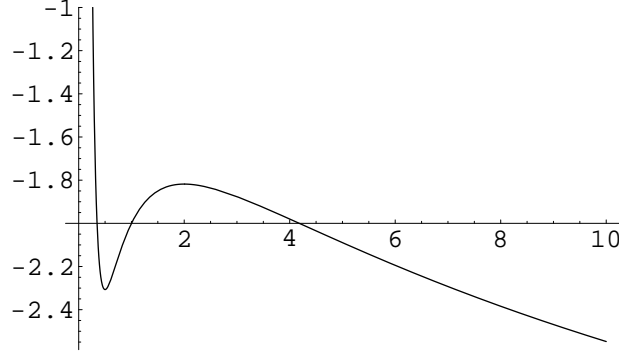


Figura 3. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $|L| < \beta/2$.

Da $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Suddividiamo il problema in tre casi.

Caso 1. $\alpha > 0$ oppure $|L| > \beta/2$. Per ogni valore di E avremo una traiettoria aperta, simmetrica rispetto all'asse ρ , con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

Caso 2. $|L| = \beta/2$.

(i) Per $E < V_{\text{eff}}(\beta/2)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

(ii) Per $E = V_{\text{eff}}(\beta/2)$ due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$, e con

$$\lim_{\rho \rightarrow \beta/2} y(\rho) = 0$$

con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile P_0 .

(iii) Per $E > V_{\text{eff}}(\beta/2)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

Caso 3. $|L| < \beta/2$.

(i) Per $E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

(ii) Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto stabile P_- .

(iii) Per $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto stabile P_- e una periodica intorno al punto stabile.

(iv) Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria omoclina con $\lim_{\rho \rightarrow \rho_+} y(\rho) = 0$, due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto instabile P_+ .

(v) Per $E > V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

1.4. Traiettorie periodiche. Per quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso $L^2 > 2$ e solo per dati iniziali $\rho_- < \rho < \rho_+$. In particolare, se $2 < L^2 < 4/\sqrt{3}$ avremo traiettorie periodiche per valori di energia $V_{\text{eff}}(\rho_+) < E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$, mentre se $L^2 \geq 4/\sqrt{3}$ le traiettorie periodiche saranno possibili per valori di energia $V_{\text{eff}}(\rho_+) < E < 0$.

1.5. Traiettorie complessivamente periodiche. Avremo moto complessivo periodico in accordo con le condizioni date al punto precedente, e nei punti d'equilibrio.

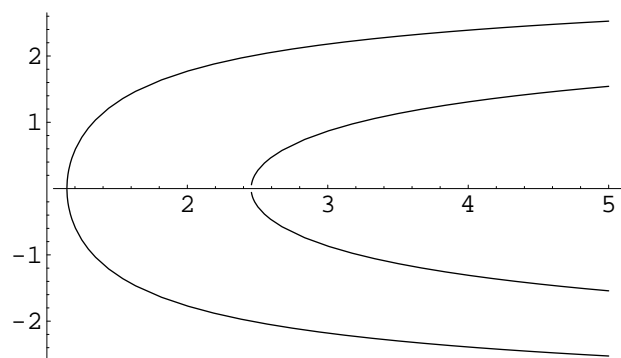


Figura 4. Grafico qualitativo del piano delle fasi per $\alpha \geq 0$ oppure $|L| > \beta/2$.

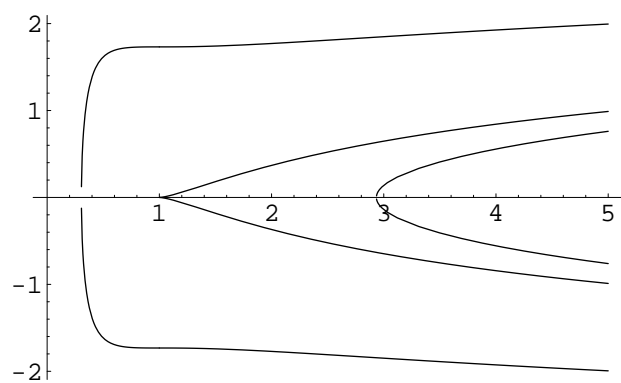


Figura 5. Grafico qualitativo del piano delle fasi per $|L| = \beta/2$.

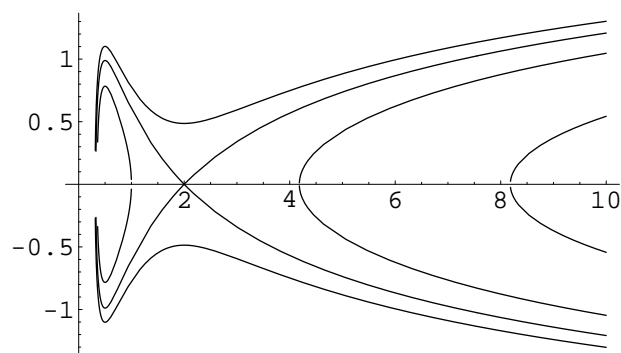


Figura 6. Grafico qualitativo del piano delle fasi per $|L| < \beta/2$.

Inoltre se T_0 è il periodo della variabile ρ e

$$\Delta\theta = \int_0^{T_0} ds \frac{L}{\rho^2(s)}$$

deve valere che $\Delta\theta$ è commensurabile con 2π . In particolare se N è l'intero minimo tale che $N\Delta\theta = 2\pi M$ per qualche M intero, allora il periodo del moto complessivo è dato da NT_0 .

ESERCIZIO 2.

2.1. Equazioni di Newton e sistema dinamico associato. Poiché $m = 1$ il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y, \\ \dot{y} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3}. \end{cases}$$

2.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione $V_{\text{eff}}'(\rho) = 0$ vediamo che questa ha soluzione se e solo se $L^2 \leq 1$. In particolare avremo quindi:

- (i) Per $L^2 < 1$ nessun punto d'equilibrio.
- (ii) Per $L^2 = 1$ un solo punto d'equilibrio in $P_0 = (1, 0)$.
- (iii) Per $L^2 \leq 1$ due punti d'equilibrio in $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$, con $\rho_{\pm} = \sqrt[3]{1 \pm \sqrt{1 - L^2}}$

Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = -3\rho^2 + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

quindi se $L^2 = 1$ avremo che $[dV_{\text{eff}}/d\rho] < 0 \forall \rho \neq 1$ cioè $\rho = 1$ è una sella del potenziale, dunque P_0 è instabile. Per $L^2 < 1$ invece si ha $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_-) > 0$ quindi ρ_- è un minimo del potenziale e dunque P_- è stabile; viceversa $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_+) < 0$ quindi ρ_+ è un massimo e perciò P_+ è instabile.

2.3. Studio qualitativo del potenziale efficace. Indipendentemente dal valore di L si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty.$$

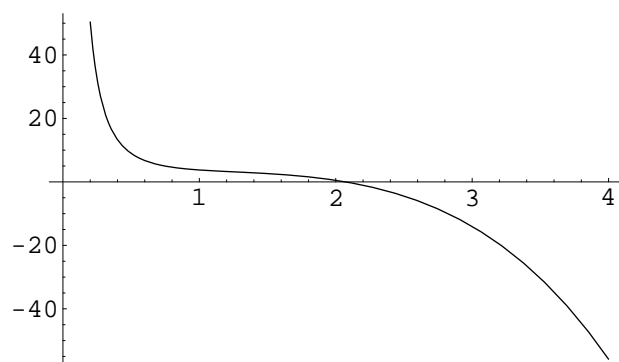


Figura 7. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 < 2$.

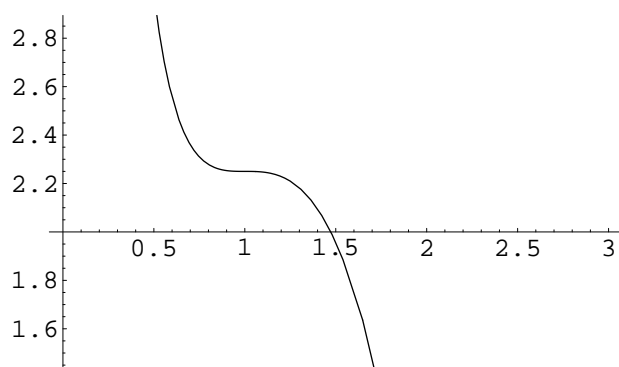


Figura 8. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 = 2$.

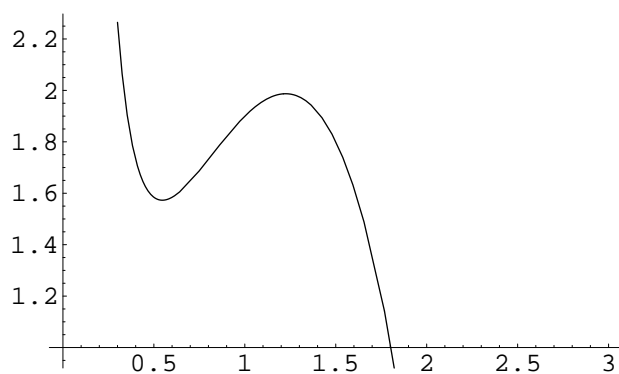


Figura 9. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 > 2$.

2.4. Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(r))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Suddividiamo il problema in tre casi.

Caso 1. $L^2 > 1$. Per ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$

Caso 2. $L^2 = 1$:

(i) Per $E < V_{\text{eff}}(1)$ avremo una curva aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

(ii) Per $E = V_{\text{eff}}(1)$ due traiettorie aperte con

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty,$$

e con $\lim_{\rho \rightarrow 1} y(\rho) = 0$ con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile $(1, 0)$.

(iii) Per $E \geq V_{\text{eff}}(1)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = +\infty$.

Caso 3. $L^2 < 1$.

(i) Per $E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty.$$

(ii) Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$ una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$$

e il punto stabile P_- .

(iii) per $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$$

e una periodica intorno al punto stabile P_- .

(iv) Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$ il punto instabile P_+ , due traiettorie aperte tali che

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_+} y(\rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$$

rispettivamente, e una traiettoria omoclina al punto instabile con tangenza obliqua.

(v) Per $E > V_{\text{eff}}(\rho_+)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = +\infty$.

2.5. Traiettorie periodiche. Per quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso $L^2 < 1$ e solo per dati iniziali $\rho_- < \rho < \rho_+$ e valori di energia $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$.

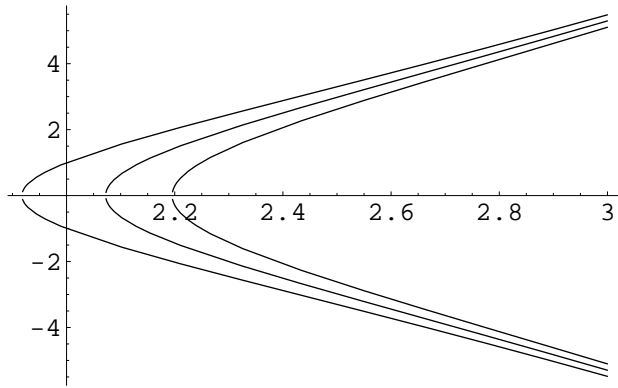


Figura 10. Piano delle fasi per $L^2 < 2$.

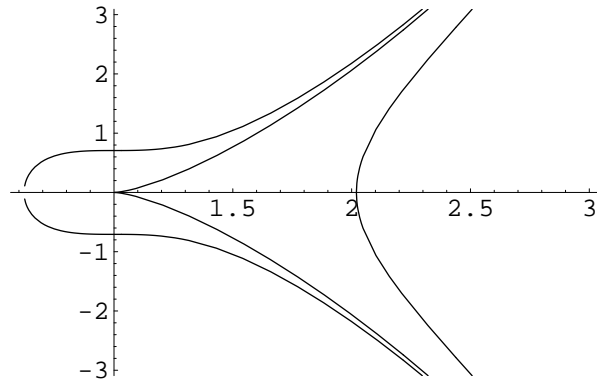


Figura 11. Piano delle fasi per $L^2 = 2$.

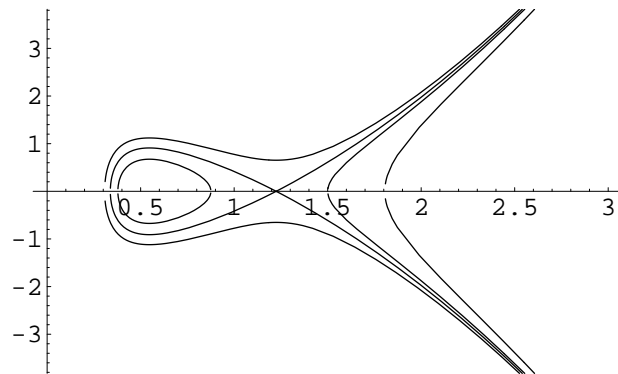


Figura 12. Piano delle fasi per $L^2 > 2$.

ESERCIZIO 3.

3.1. Equazioni di Newton e sistema dinamico associato. Poiché $m = 1$, il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\rho^2 + 4 \ln \rho + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = 2\rho - \frac{4}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y, \\ \dot{y} = 2\rho - \frac{4}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3}. \end{cases}$$

3.2. Punti d'equilibrio e stabilità. Considerato il sistema dinamico associato, i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace; pertanto dobbiamo risolvere l'equazione

$$-2\rho - \frac{4}{\rho} - \frac{L^2}{\rho^3} = 0$$

e questa ha soluzione se e solo se

$$2\rho^4 - 4\rho^2 + L^2 = 0$$

che ha soluzione se e solo se $L^2 \leq 2$. In particolare avremo

- (i) Per $L^2 > 2$ nessun punto d'equilibrio.
- (ii) Per $L^2 = 2$ un solo punto d'equilibrio in $(1, 0)$.
- (iii) Per $L^2 \leq 2$ due punti d'equilibrio:

$$P_1 = (\rho_1, 0) = \left(\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}L^2}}, 0 \right), \quad P_2 = (\rho_2, 0) = \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}L^2}}, 0 \right)$$

Derivando ulteriormente il potenziale otteniamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = -2 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

quindi, se $L^2 = 2$ avremo che $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](1) = 0$ e $[dV_{\text{eff}}/d\rho] < 0$ per ogni valore di $\rho \neq 1$ perciò $\rho = 1$ è un punto di sella del potenziale efficace e quindi il punto

d'equilibrio $(1, 0)$ è instabile. Per $L^2 \leq 2$ invece, si ha $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_1) > 0$ quindi $\rho = \rho_1$ è un punto di minimo del potenziale, pertanto P_1 sarà un punto d'equilibrio stabile per il sistema. Viceversa $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](\rho_2) < 0$ quindi $\rho = \rho_2$ è un punto di massimo per il potenziale, quindi P_2 sarà un punto d'equilibrio instabile.

3.3. Studio qualitativo del potenziale efficace. Si vede facilmente che

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

indipendentemente dal valore di ρ .

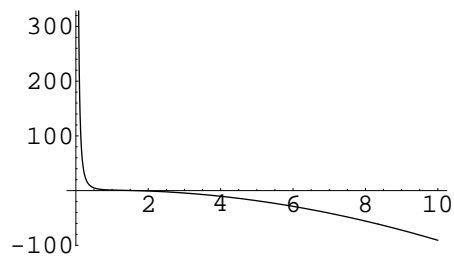


Figura 13. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 > 2$.

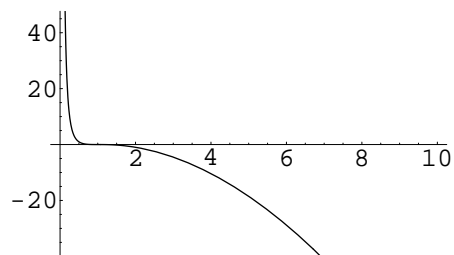


Figura 14. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 = 2$.

3.4. Piano delle fasi. Da $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Inoltre, poich

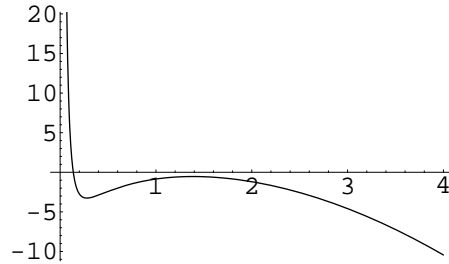


Figura 9. Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 < 2$.

il potenziale efficace non è limitato dal basso, il moto sarà possibile per ogni valore di energia. Suddividiamo dunque il problema in tre casi.

Caso 1. $L^2 > 2$. Per ogni valore di E avremo una curva aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

Caso 2. $L^2 = 2$.

- (i) Per $E < V_{\text{eff}}(1) = 0$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.
- (ii) Per $E = 0$ due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ rispettivamente e con $\lim_{\rho \rightarrow 1} y(\rho) = 0$ con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile $(1, 0)$
- (iii) Per $E > 0$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.

Caso 3. $L^2 < 2$

- (i) Per $E < V_{\text{eff}}(\rho_1)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$.
- (ii) Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_1)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e il punto stabile P_1 .
- (iii) Per $V_{\text{eff}}(\rho_1) < E < V_{\text{eff}}(\rho_2)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ e una periodica intorno al punto stabile P_1
- (iv) Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_2)$ due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ rispettivamente, il punto instabile P_2 e una traiettoria omoclina che interseca le due aperte nel punto instabile con tangenti oblique.
- (v) Per $E > V_{\text{eff}}(\rho_2)$ una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$

3.5. Traiettorie periodiche. Per quanto visto al punto precedente, avremo traiettorie periodiche solo nel caso $L^2 < 2$. In particolare ciò avverrà per $V_{\text{eff}}(\rho_1) < E < V_{\text{eff}}(\rho_2)$ e $\rho < \rho_2$.

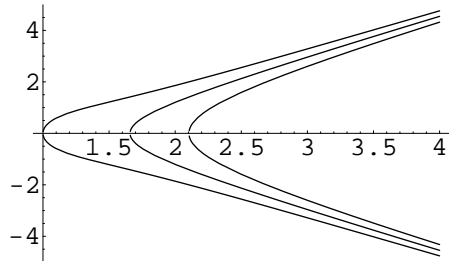


Figura 16. Piano delle fasi per $L^2 > 2$.

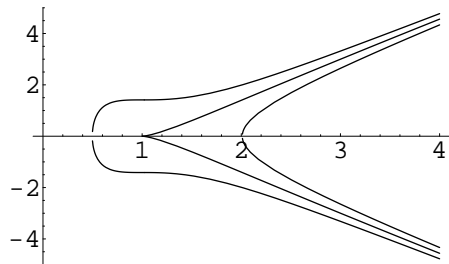


Figura 17. Piano delle fasi per $L^2 = 2$.

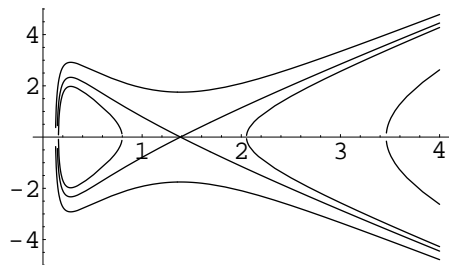


Figura 18. Piano delle fasi per $L^2 > 2$.